

Comment calculer avec un ordinateur analogique ?

Amaury Pouly

Université de Paris, IRIF, CNRS

7 mai 2019



INSTITUT
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE
FONDAMENTALE



université
PARIS
DIDEROT
C. LÉVELY



Le retour des ordinateurs analogiques

1930

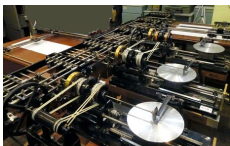


ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés

2000

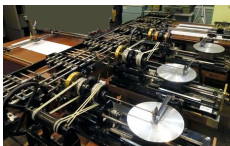


ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés
- ▶ **obsolètes ?**

2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés
- ▶ **obsolètes ?**

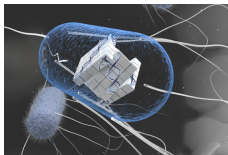
2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

2030 ?



- ▶ analogique ?
- ▶ digital ?

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés
- ▶ **obsolètes ?**

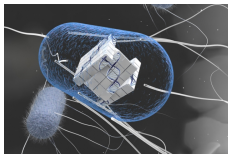
2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

2030 ?



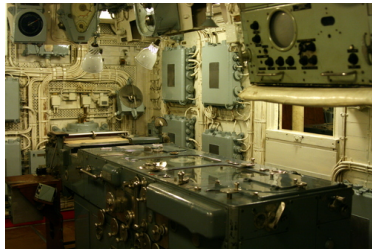
- ▶ analogique ?
- ▶ digital ?
- ▶ **les deux !**

Ordinateurs Analogiques



Differential Analyser

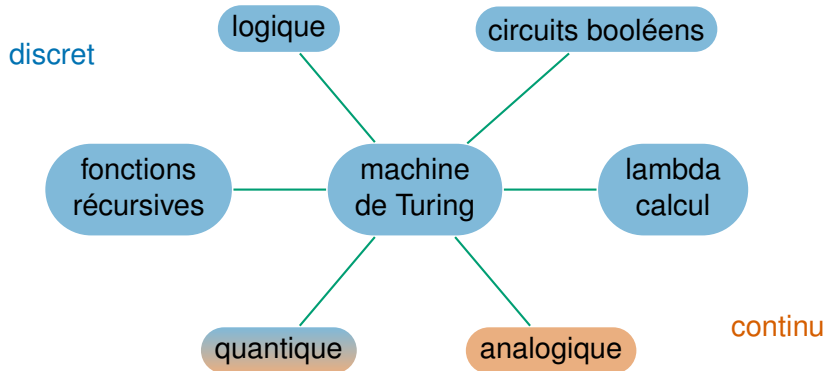
“Mathematica des années 1920”



Admiralty Fire Control Table

British Navy (WW2)

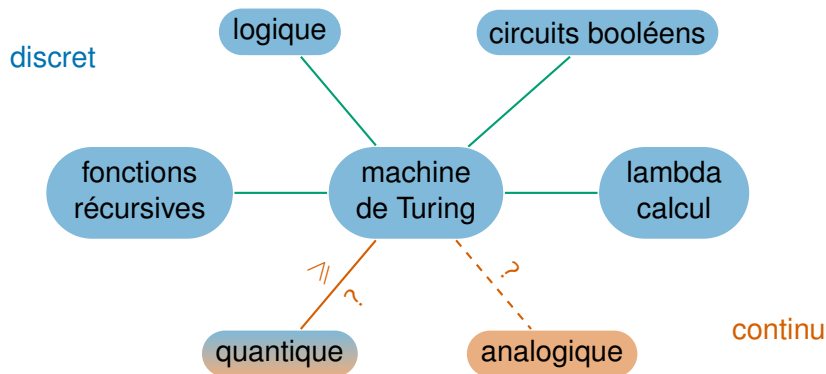
Calculabilité



Thèse de Church

Tous les modèles de calculs **raisonnables** sont équivalents.

Complexité



Thèse de Church effective

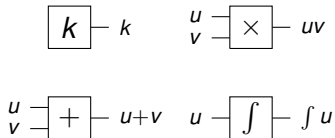
Tous les modèles **raisonnables** sont équivalents pour la complexité.

Des machines aux modèles



Analyseur différentiel

Des machines aux modèles

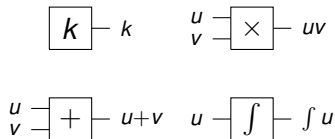


General Purpose Analog
Computer, Shannon 1936



Analyseur différentiel

Des machines aux modèles



General Purpose Analog
Computer, Shannon 1936

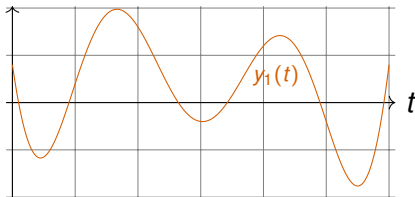


$$y(0) = y_0, \quad y'(t) = p(y(t))$$

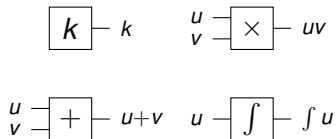
Équations différentielles
polynomiales, Graça 2004



Analyseur différentiel



Des machines aux modèles



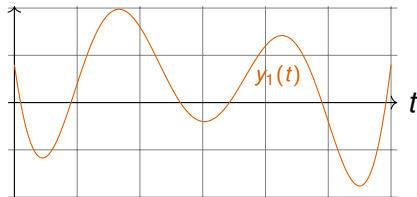
General Purpose Analog
Computer, Shannon 1936



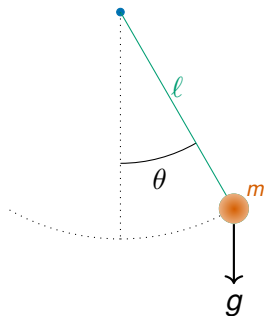
Analyseur différentiel

$$y(0) = y_0, \quad y'(t) = p(y(t))$$

Équations différentielles
polynomiales, Graça 2004

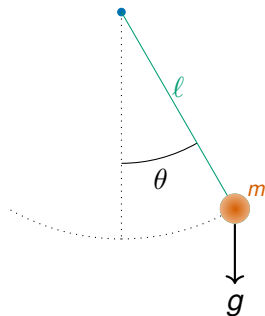


Un exemple concret



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$

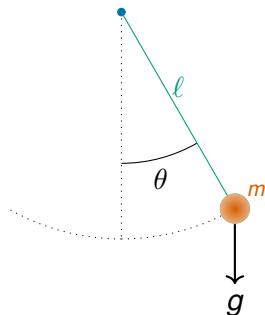
Un exemple concret



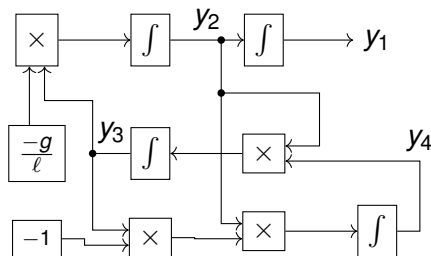
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \dot{\theta} \\ y_3 = \sin(\theta) \\ y_4 = \cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{g}{\ell} y_3 \\ y_3' = y_2 y_4 \\ y_4' = -y_2 y_3 \end{cases}$$

Un exemple concret

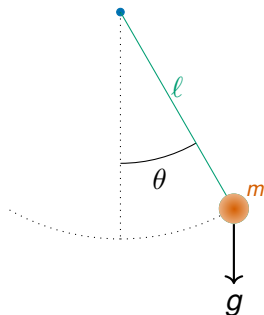


$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$

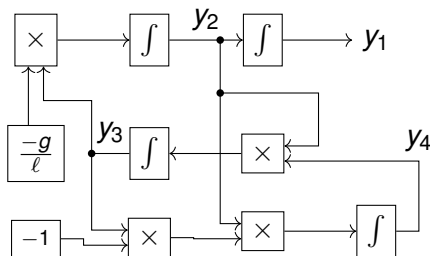


$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \dot{\theta} \\ y_3 = \sin(\theta) \\ y_4 = \cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{g}{\ell} y_3 \\ y_3' = y_2 y_4 \\ y_4' = -y_2 y_3 \end{cases}$$

Un exemple concret



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$



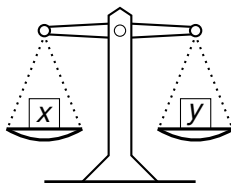
$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \dot{\theta} \\ y_3 = \sin(\theta) \\ y_4 = \cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{g}{\ell} y_3 \\ y_3' = y_2 y_4 \\ y_4' = -y_2 y_3 \end{cases}$$

Remarque historique : le mot “analogique”

Le pendule et le circuit ont les mêmes équations : on peut étudier le pendule en travaillant sur le circuit **par analogie**.

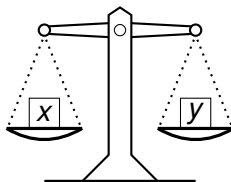
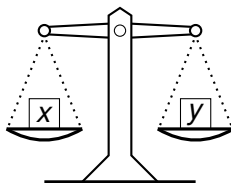
Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



Une balance calcule-t-elle une fonction ?

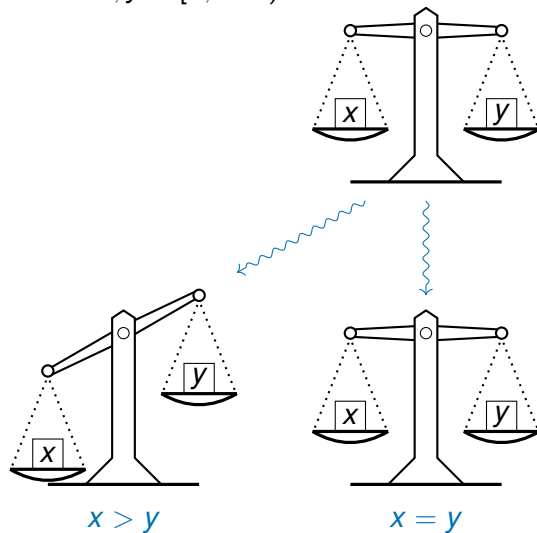
Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



$$x = y$$

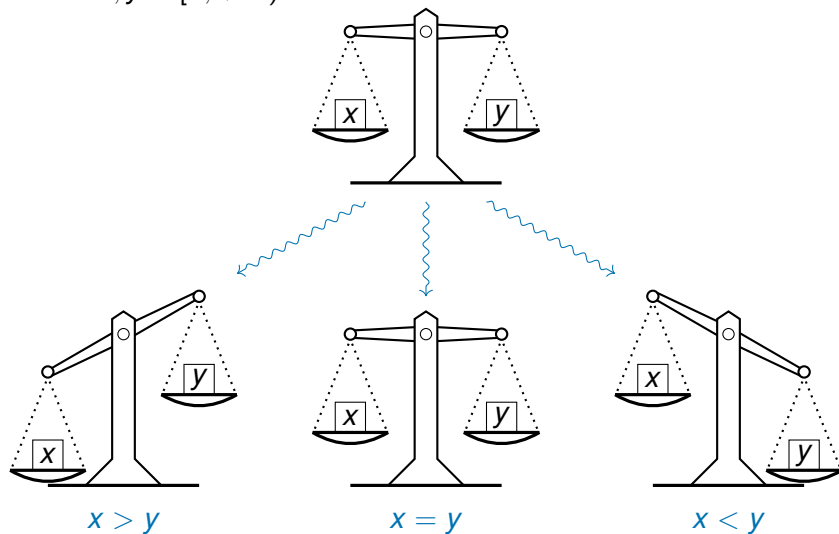
Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



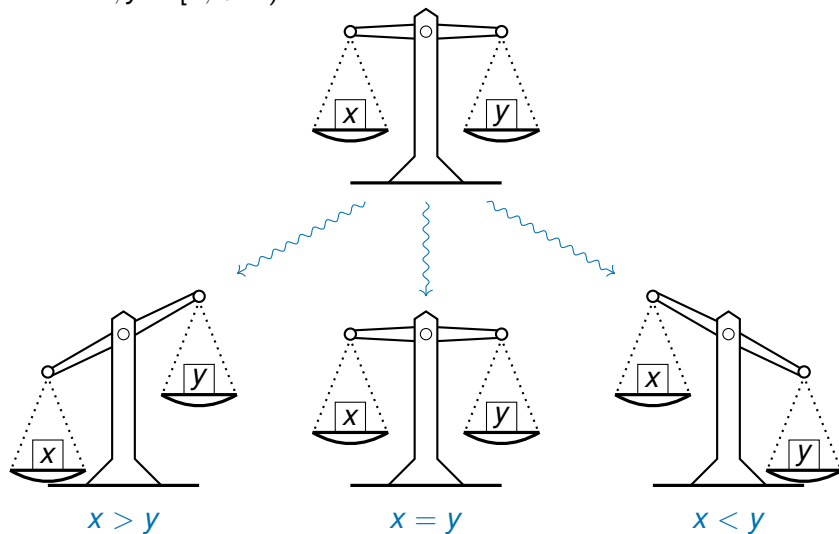
Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



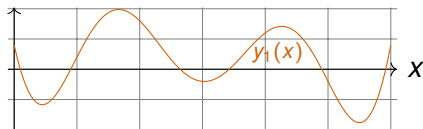
Sortie : $\text{signe}(x - y)$?

Calculer avec des équations différentielles

Fonctions générables

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(x) = p(y(x)) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y_1(x)$$



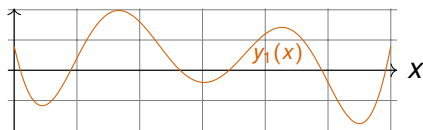
Notion inventée par Shannon

Calculer avec des équations différentielles

Fonctions générables

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(x) = p(y(x)) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y_1(x)$$



Notion inventée par Shannon

$\sin, \cos, \exp, \log, \dots$

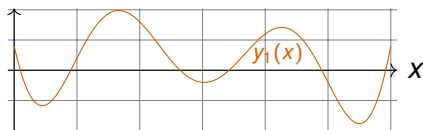
Moins fort que les machines de
Turing [Shannon, 1941]

Calculer avec des équations différentielles

Fonctions générables

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(x) = p(y(x)) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y_1(x)$$



Notion inventée par Shannon

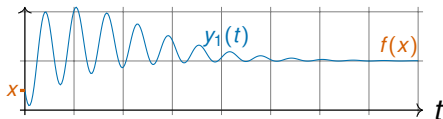
sin, cos, exp, log, ...

Moins fort que les machines de Turing [Shannon, 1941]

Fonctions calculables

$$\begin{cases} y(0) = q(x) \\ y'(t) = p(y(t)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R}_+ \end{array}$$

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t)$$



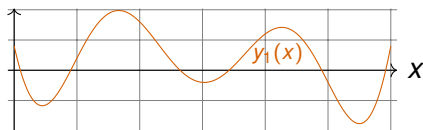
Notion moderne

Calculer avec des équations différentielles

Fonctions générables

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(x) = p(y(x)) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = y_1(x)$$



Notion inventée par Shannon

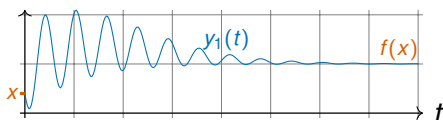
$\sin, \cos, \exp, \log, \dots$

Moins fort que les machines de Turing
[Shannon, 1941]

Fonctions calculables

$$\begin{cases} y(0) = q(x) \\ y'(t) = p(y(t)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R}_+ \end{array}$$

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t)$$



Notion moderne

$\sin, \cos, \exp, \log, \Gamma, \zeta, \dots$

Équivalent aux machines de Turing
[Bournez et al., 2007]

Calculabilité : du monde discret au continu

Computable Analysis : calculabilité “de Turing” sur $\mathbb{R}$

Calculabilité : du monde discret au continu

Computable Analysis : calculabilité “de Turing” sur $\mathbb{R}$

Définition (Ko, 1991 ; Weihrauch, 2000)

$x \in \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ calculable tel que

$$|x - f(n)| \leq 10^{-n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Exemples : les rationels, π , e , ...

n	f(n)	$\pi - f(n)$
0	3	$0.14 \leq 10^{-0}$
1	3.1	$0.04 \leq 10^{-1}$
2	3.14	$0.001 \leq 10^{-2}$
10	3.1415926535	$0.9 \cdot 10^{-10} \leq 10^{-10}$

Calculabilité : du monde discret au continu

Computable Analysis : calculabilité “de Turing” sur $\mathbb{R}$

Définition (Ko, 1991 ; Weihrauch, 2000)

$x \in \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ calculable tel que

$$|x - f(n)| \leq 10^{-n} \quad n \in \mathbb{N}$$

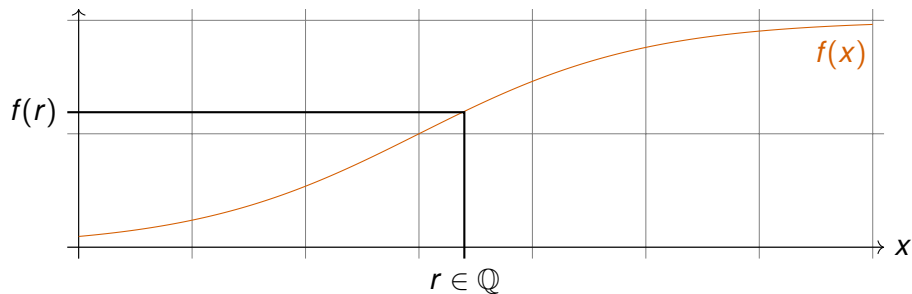
Exemples : les rationels, π , e , ...

n	f(n)	$\pi - f(n)$
0	3	$0.14 \leq 10^{-0}$
1	3.1	$0.04 \leq 10^{-1}$
2	3.14	$0.001 \leq 10^{-2}$
10	3.1415926535	$0.9 \cdot 10^{-10} \leq 10^{-10}$

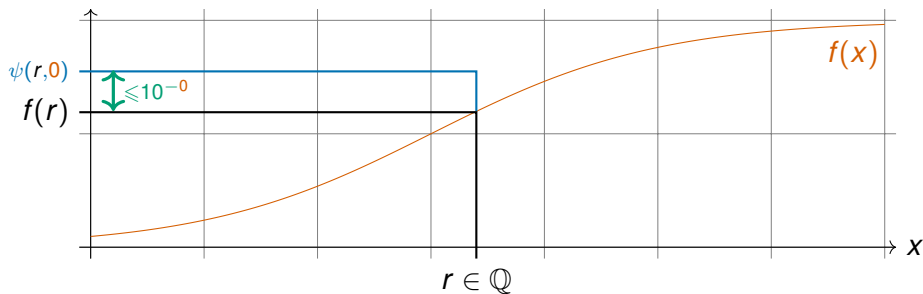
Attention : il existe des nombre méchants/non-calculables !

$$x = \sum_{n \in \Gamma} 2^{-n}, \quad \Gamma = \{n : \text{la } n^{\text{eme}} \text{ machine de Turing s'arrête}\}$$

Calculabilité : du monde discret au continu



Calculabilité : du monde discret au continu

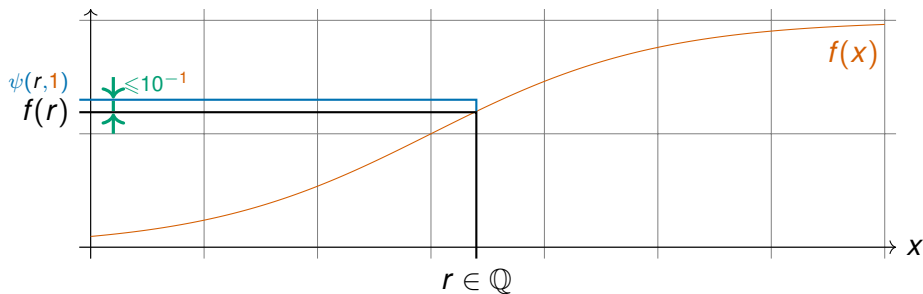


Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists$ $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, fonctions calculables telles que

- approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$

Calculabilité : du monde discret au continu

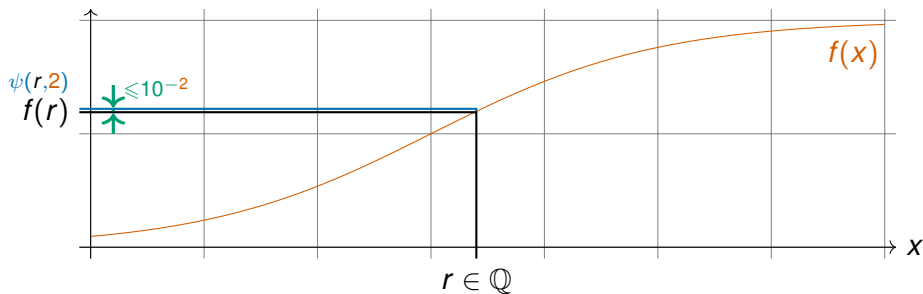


Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists$ $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, fonctions calculable telles que

- approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$

Calculabilité : du monde discret au continu

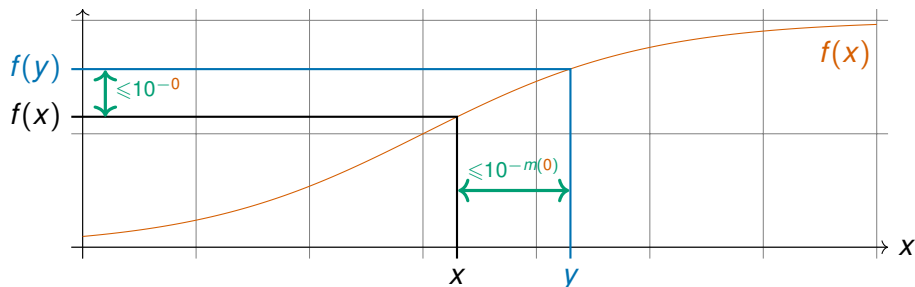


Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists$ $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, fonctions calculables telles que

- approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$

Calculabilité : du monde discret au continu

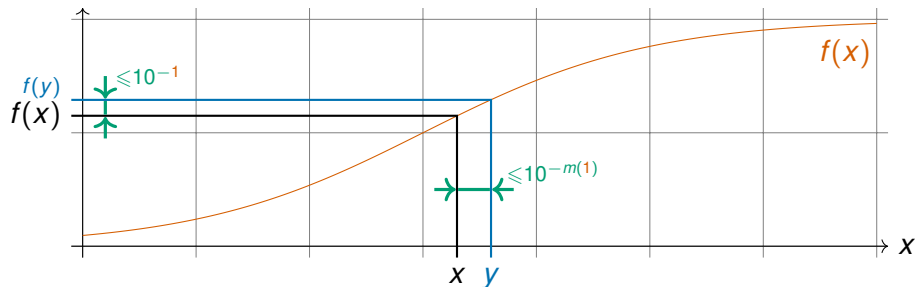


Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists$ $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonctions calculable telles que

- ▶ approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$
- ▶ continuité effective : $|x - y| \leq 10^{-m(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 10^{-n}$
 m : module de continuité

Calculabilité : du monde discret au continu

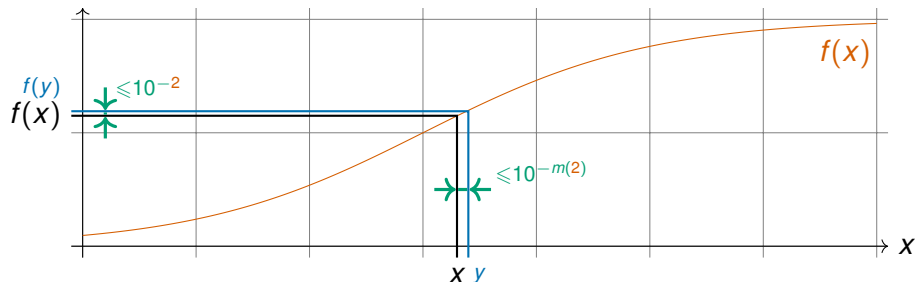


Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists$ $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonctions calculable telles que

- ▶ approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$
- ▶ continuité effective : $|x - y| \leq 10^{-m(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 10^{-n}$
 m : module de continuité

Calculabilité : du monde discret au continu



Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonctions calculable telles que

- ▶ approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$
- ▶ continuité effective : $|x - y| \leq 10^{-m(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 10^{-n}$
 m : module de continuité

Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonctions calculable telles que

- ▶ approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$
- ▶ continuité effective : $|x - y| \leq 10^{-m(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 10^{-n}$
 m : module de continuité

Les fonctions calculables sont continues !

Exemples : les polynômes, $\sin$, $\exp$, $\sqrt{\cdot}$

Attention : il existe des fonctions (continues) non-calculables !

Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonctions calculable telles que

- ▶ approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$
- ▶ continuité effective : $|x - y| \leq 10^{-m(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 10^{-n}$
 m : module de continuité

Les fonctions calculables sont continues !

Exemples : les polynômes, $\sin$, $\exp$, $\sqrt{\cdot}$.

Attention : il existe des fonctions (continues) non-calculables !

Complexité : temps polynomial

Ajouter “calculable en temps polynomial” partout.

Calculabilité : du monde discret au continu

Définition (Fonction calculable)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est calculable ssi $\exists m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \psi : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonctions calculable telles que

- ▶ approximation effective sur $\mathbb{Q}$: $|f(r) - \psi(r, n)| \leq 10^{-n}$
- ▶ continuité effective : $|x - y| \leq 10^{-m(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 10^{-n}$
 m : module de continuité

Les fonctions calculables sont continues !

Exemples : les polynômes, $\sin$, $\exp$, $\sqrt{\cdot}$

Attention : il existe des fonctions (continues) non-calculables !

Complexité : temps polynomial

Ajouter “calculable en temps polynomial” partout.

Remarque : il existe d'autres notions de calculabilité sur $\mathbb{R}$, notamment BSS (Blum-Shub-Smale).

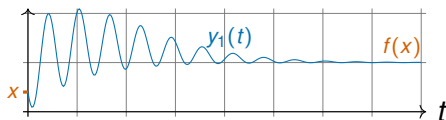
Équivalence avec l'analyse calculable

Définition (Bournez et al, 2007)

f est **calculable par GPAC** si $\exists p$ polynôme tel que $\forall x \in [a, b]$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y'(t) = p(y(t))$$

satisfait $|f(x) - y_1(t)| \leq y_2(t)$ et $y_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.



$$y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} f(x)$$

$$y_2(t) = \text{borne d'erreur}$$

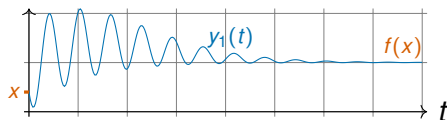
Équivalence avec l'analyse calculable

Définition (Bournez et al, 2007)

f est **calculable par GPAC** si $\exists p$ polynôme tel que $\forall x \in [a, b]$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y'(t) = p(y(t))$$

satisfait $|f(x) - y_1(t)| \leq y_2(t)$ et $y_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.



$$y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} f(x)$$

$$y_2(t) = \text{borne d'erreur}$$

Théorème (Bournez et al, 2007)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ calculable $\Leftrightarrow f$ calculable par GPAC

Complexité pour les systèmes analogiques

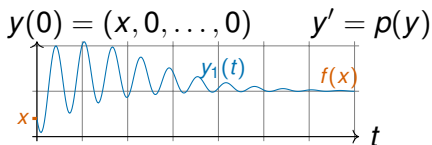
- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x

Complexité pour les systèmes analogiques

- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x
- ▶ GPAC :

Tentative de définition

$$T(x) = ??$$

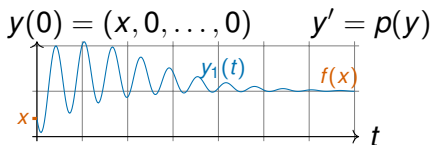


Complexité pour les systèmes analogiques

- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x
- ▶ GPAC :

Tentative de définition

$$T(x, \mu) =$$

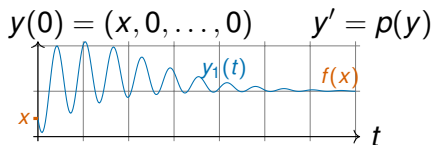


Complexité pour les systèmes analogiques

- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x
- ▶ GPAC :

Tentative de définition

$T(x, \mu)$ = premier temps t à partir duquel $|y_1(t) - f(x)| \leq e^{-\mu}$



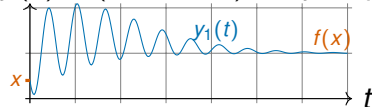
Complexité pour les systèmes analogiques

- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x
- ▶ GPAC :

Tentative de définition

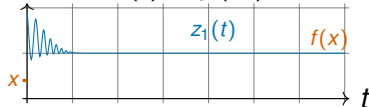
$T(x, \mu)$ = premier temps t à partir duquel $|y_1(t) - f(x)| \leq e^{-\mu}$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y)$$



$\leadsto$

$$z(t) = y(e^t)$$



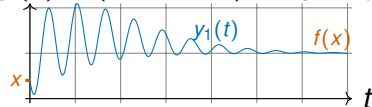
Complexité pour les systèmes analogiques

- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x
- ▶ GPAC :

Tentative de définition

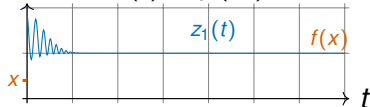
$T(x, \mu)$ = premier temps t à partir duquel $|y_1(t) - f(x)| \leq e^{-\mu}$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y)$$

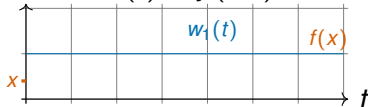


$\leadsto$

$$z(t) = y(e^t)$$



$$w(t) = y(e^{e^t})$$



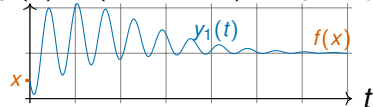
Complexité pour les systèmes analogiques

- ▶ machines de Turing : $T(x)$ = nombre de pas sur l'entrée x
- ▶ GPAC : problème de contraction du temps → **problème ouvert**

Tentative de définition

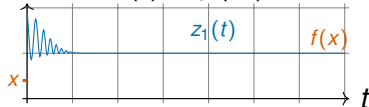
$T(x, \mu)$ = premier temps t à partir duquel $|y_1(t) - f(x)| \leq e^{-\mu}$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y)$$



$\leadsto$

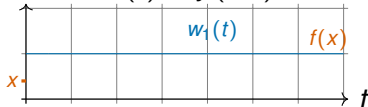
$$z(t) = y(e^t)$$



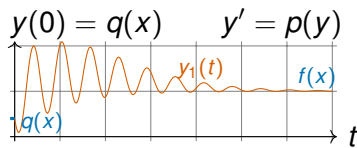
Quelque chose ne va pas ...

Toutes les fonctions ont une complexité constante.

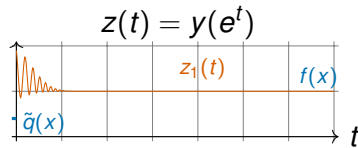
$$w(t) = y(e^{e^t})$$



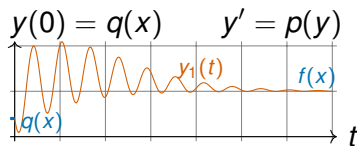
Corrélation temps/espace du GPAC



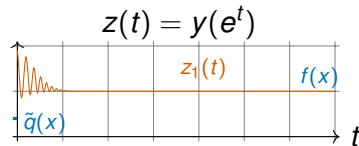
$\leadsto$



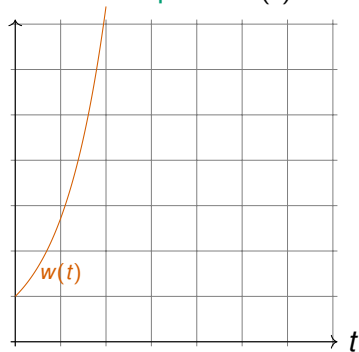
Corrélation temps/espace du GPAC



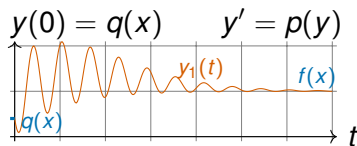
$\leadsto$



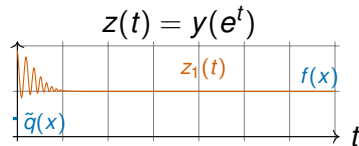
variable en plus : $w(t) = e^t$



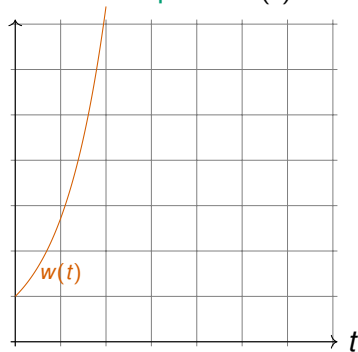
Corrélation temps/espace du GPAC



$\leadsto$



variable en plus : $w(t) = e^t$



Observation

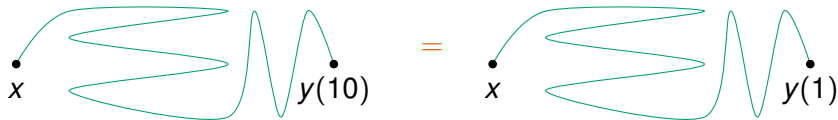
Changer l'échelle de temps
prend de "l'espace".

$\leadsto$

La complexité pour le GPAC
doit prendre en compte le
temps et l'espace !

La complexité dans le monde analogique

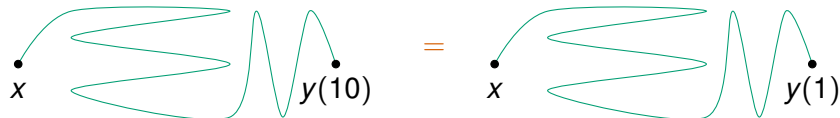
Mesure de complexité : longueur de la trajectoire



Accélération du temps : même courbe = même complexité !

La complexité dans le monde analogique

Mesure de complexité : longueur de la trajectoire



Accélération du temps : même courbe = même complexité !

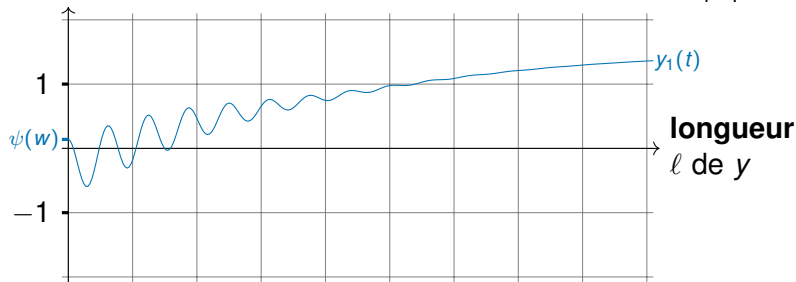


Même temps, courbe différentes : complexité différente !

Caractérisation du temps polynomial

Définition : $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME} \Leftrightarrow \exists p$ polynôme, $\forall$ mot w

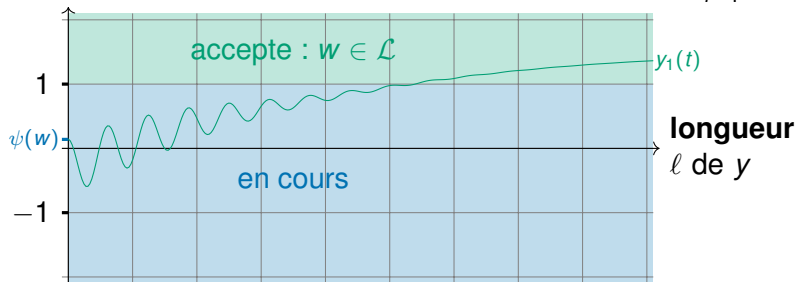
$$y(0) = (\psi(w), |w|, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y) \quad \psi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} w_i 2^{-i}$$



Caractérisation du temps polynomial

Définition : $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME} \Leftrightarrow \exists p$ polynôme, $\forall$ mot w

$$y(0) = (\psi(w), |w|, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y) \quad \psi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} w_i 2^{-i}$$



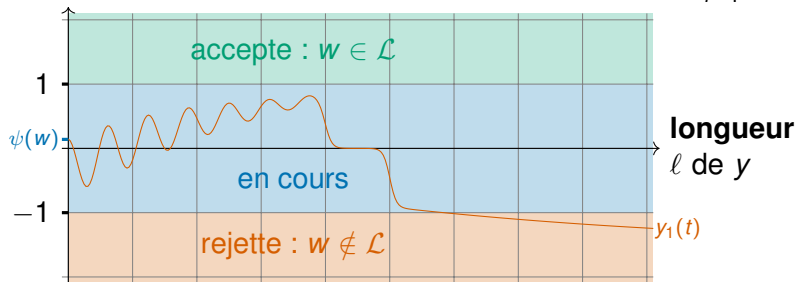
satisfait

1. si $y_1(t) \geq 1$ alors $w \in \mathcal{L}$

Caractérisation du temps polynomial

Définition : $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME} \Leftrightarrow \exists p$ polynôme, $\forall$ mot w

$$y(0) = (\psi(w), |w|, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y) \quad \psi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} w_i 2^{-i}$$



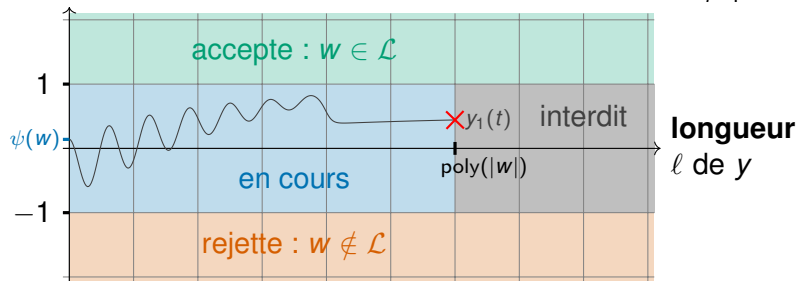
satisfait

2. si $y_1(t) \leq -1$ alors $w \notin \mathcal{L}$

Caractérisation du temps polynomial

Définition : $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME} \Leftrightarrow \exists p$ polynôme, $\forall$ mot w

$$y(0) = (\psi(w), |w|, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y) \quad \psi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} w_i 2^{-i}$$



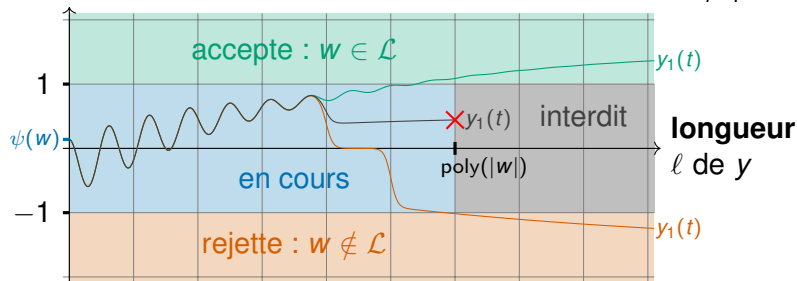
satisfait

3. si $\ell(t) \geq \text{poly}(|w|)$ alors $|y_1(t)| \geq 1$

Caractérisation du temps polynomial

Définition : $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME} \Leftrightarrow \exists p$ polynôme, $\forall$ mot w

$$y(0) = (\psi(w), |w|, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y) \quad \psi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} w_i 2^{-i}$$

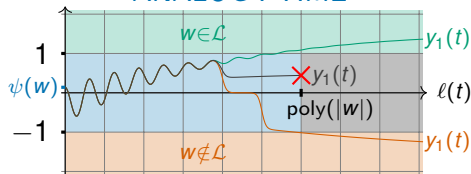


Théorème

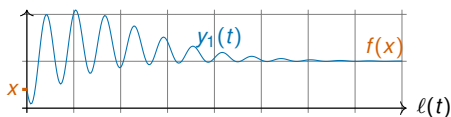
$$\text{PTIME} = \text{ANALOG-PTIME}$$

Résumé

ANALOG-PTIME



ANALOG-P_ℝ



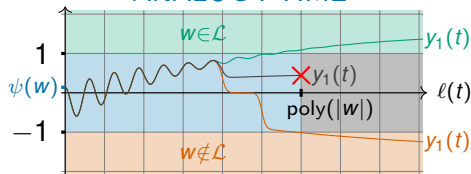
Théorème

- ▶ $\mathcal{L} \in \text{PTIME}$ si et seulement si $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME}$
- ▶ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ calculable en temps polynomial $\Leftrightarrow f \in \text{ANALOG-P}_{\mathbb{R}}$

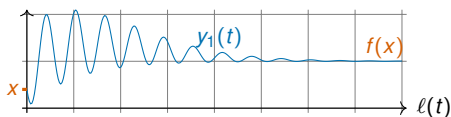
- ▶ Théorie de la complexité analogique basée sur la longueur
- ▶ Temps des machines de Turing $\Leftrightarrow$ longueur du GPAC
- ▶ Caractérisation purement continue de PTIME

Résumé

ANALOG-PTIME



ANALOG-P $_{\mathbb{R}}$



Théorème

- ▶ $\mathcal{L} \in \text{PTIME}$ si et seulement si $\mathcal{L} \in \text{ANALOG-PTIME}$
- ▶ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ calculable en temps polynomial $\Leftrightarrow f \in \text{ANALOG-P}_{\mathbb{R}}$

- ▶ Théorie de la complexité analogique basée sur la longueur
- ▶ Temps des machines de Turing $\Leftrightarrow$ longueur du GPAC
- ▶ Caractérisation purement continue de PTIME
- ▶ Des coefficients rationnels suffisent

Dans le temps restant...

Deux applications de la théorie que nous avons développé

~> Réseaux de réactions chimiques

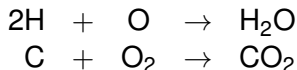
Équation différentielle universelle

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Définition : un **système de réactions** est un ensemble fini :

- ▶ d'espèces moléculaires $y_1, \dots, y_n$
- ▶ de réactions $\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}, k = \text{vitesse}$

Exemple (vaguement inspiré de la vraie chimie) :

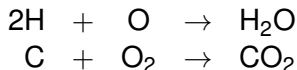


Chemical Reaction Networks (CRNs)

Définition : un **système de réactions** est un ensemble fini :

- ▶ d'espèces moléculaires $y_1, \dots, y_n$
- ▶ de réactions $\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}, k = \text{vitesse}$

Exemple (vaguement inspiré de la vraie chimie) :



Hypothèse : loi d'action de masse

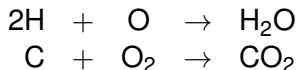
$$\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \rightsquigarrow f(y) = k \prod_i y_i^{a_i}$$

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Définition : un **système de réactions** est un ensemble fini :

- ▶ d'espèces moléculaires $y_1, \dots, y_n$
- ▶ de réactions $\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}, k = \text{vitesse}$

Exemple (vaguement inspiré de la vraie chimie) :



Hypothèse : loi d'action de masse

$$\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \rightsquigarrow f(y) = k \prod_i y_i^{a_i}$$

Sémantique :

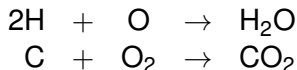
- ▶ discrète
- ▶ différentielle
- ▶ stochastique

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Définition : un **système de réactions** est un ensemble fini :

- ▶ d'espèces moléculaires $y_1, \dots, y_n$
- ▶ de réactions $\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}, k = \text{vitesse}$

Exemple (vaguement inspiré de la vraie chimie) :



Hypothèse : loi d'action de masse

$$\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \rightsquigarrow f(y) = k \prod_i y_i^{a_i}$$

Sémantique :

- ▶ discrète
- ▶ différentielle $\rightarrow$
- ▶ stochastique

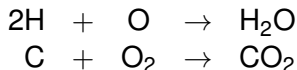
$$y'_i = \sum_{\text{réaction } R} (b_i^R - a_i^R) f^R(y)$$

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Définition : un **système de réactions** est un ensemble fini :

- ▶ d'espèces moléculaires $y_1, \dots, y_n$
- ▶ de réactions $\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}, k = \text{vitesse}$

Exemple (vaguement inspiré de la vraie chimie) :



Hypothèse : loi d'action de masse

$$\sum_i a_i y_i \xrightarrow{k} \sum_i b_i y_i \rightsquigarrow f(y) = k \prod_i y_i^{a_i}$$

Sémantique :

- ▶ discrète
- ▶ différentielle $\rightarrow$
- ▶ stochastique

$$y_i' = \sum_{\text{réaction } R} (b_i^R - a_i^R) k^R \prod_j y_j^{a_j^R}$$

Chemical Reaction Networks (CRNs)

- ▶ CRN + sémantique différentielle + loi d'action de masse = ED polynomiales
- ▶ les ED polynomiales sont Turing-complètes

Chemical Reaction Networks (CRNs)

- ▶ CRN + sémantique différentielle + loi d'action de masse = ED polynomiales
- ▶ les ED polynomiales sont Turing-complètes

Les CRN sont Turing-complet ?

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Les CRN sont Turing-complet ? Deux « petits » problèmes :

- ▶ les concentrations négatives ($y_i < 0$)
- ▶ des réactions arbitraires

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Les CRN sont Turing-complet ? Deux « petits » problèmes :

- ▶ les concentrations négatives ($y_i < 0$)
- ▶ des réactions arbitraires
- ▶ facile à régler
- ▶ pas réalistes ?

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Les CRN sont Turing-complet ? Deux « petits » problèmes :

- ▶ les concentrations négatives ($y_i < 0$)
- ▶ des réactions arbitraires
- ▶ facile à régler
- ▶ pas réalistes ?

Définition : une réaction est **élémentaire** si elle a deux réactants
⇒ peut être implémenté avec de l'ADN, ARN ou des protéines

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Les CRN sont Turing-complet ? Deux « petits » problèmes :

- ▶ les concentrations négatives ($y_i < 0$)
- ▶ des réactions arbitraires
- ▶ facile à régler
- ▶ pas réalistes ?

Définition : une réaction est **élémentaire** si elle a deux réactants
⇒ peut être implémenté avec de l'ADN, ARN ou des protéines

Les réactions élémentaires correspondent à des ED **quadratiques** :



Chemical Reaction Networks (CRNs)

Les CRN sont Turing-complet ? Deux « petits » problèmes :

- ▶ les concentrations négatives ($y_i < 0$)
- ▶ des réactions arbitraires
- ▶ facile à régler
- ▶ pas réalistes ?

Définition : une réaction est **élémentaire** si elle a deux réactants
⇒ peut être implémenté avec de l'ADN, ARN ou des protéines

Les réactions élémentaires correspondent à des ED **quadratiques** :



Théorème (Folklore)

Toute ED polynomiale peut se récrire sous forme quadratique.

Chemical Reaction Networks (CRNs)

Définition : une réaction est **élémentaire** si elle a deux réactants
⇒ peut être implémenté avec de l'ADN, ARN ou des protéines

Les réactions élémentaires correspondent à des ED **quadratiques** :

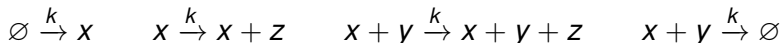


Théorème (Avec François Fages, Guillaume Le Guludec)

Les systèmes de réactions élémentaires avec la loi d'action de masse utilisant un nombre fini d'espèces sont Turing-complets pour la sémantique différentielle.

Notes :

- ▶ la preuve préserve la longueur
- ▶ les réactions suivantes suffisent :



Dans le temps restant...

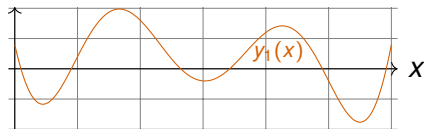
Deux applications de la théorie que nous avons développé

Réseaux de réactions chimiques

~> Équation différentielle universelle

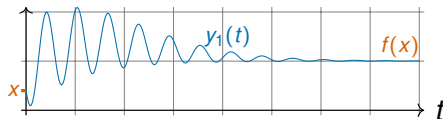
Équation différentielle universelle

Fonctions générables



$\subseteq$ fonctions analytiques

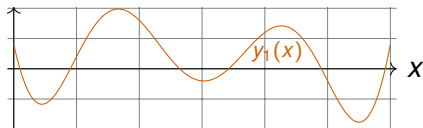
Fonctions calculables



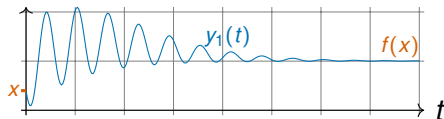
toutes les fonctions calculables

Équation différentielle universelle

Fonctions générables

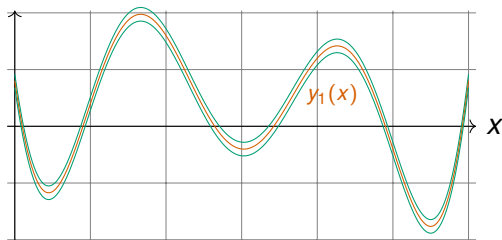


Fonctions calculables

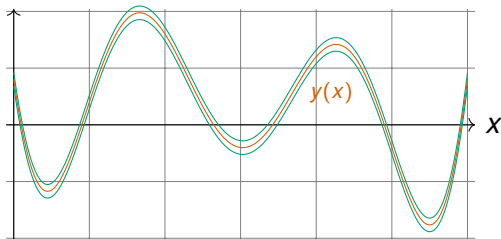


$\subseteq$ fonctions analytiques

toutes les fonctions calculables



Équation différentielle algébrique universelle



Théorème (Rubel, 1981)

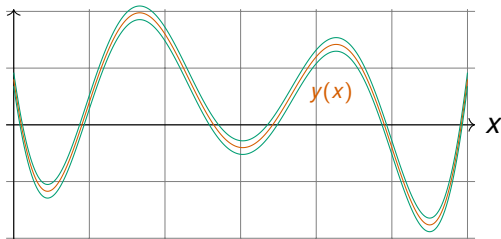
Pour toutes fonctions continues f et ε , il existe $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{aligned} 3y'^4 y'' y''''^2 - 4y'^4 y'''^2 y'''' + 6y'^3 y''^2 y''' y'''' + 24y'^2 y''^4 y'''' \\ - 12y'^3 y'' y'''^3 - 29y'^2 y''^3 y'''^2 + 12y''^7 = 0 \end{aligned}$$

telle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|y(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$

Équation différentielle algébrique universelle



Théorème (Rubel, 1981)

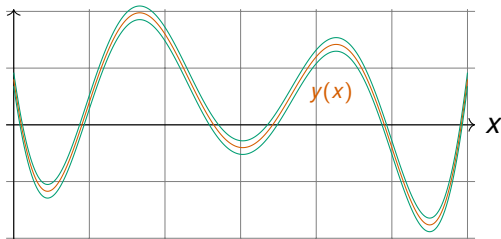
*Il existe un polynôme p et $k \in \mathbb{N}$ **fixés** tel que pour toutes fonctions continues f et ε , il existe $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de*

$$p(y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$$

telle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|y(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$

Équation différentielle algébrique universelle



Théorème (Rubel, 1981)

*Il existe un polynôme p et $k \in \mathbb{N}$ **fixés** tel que pour toutes fonctions continues f et ε , il existe $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de*

$$p(y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$$

telle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|y(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$

Problème : résultat plus «faible» qu'il n'y paraît

Le problème avec l'EDA de Rubel

La solution y n'est pas unique, **même avec des conditions initiales** :

$$p(y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \quad y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \dots, y^{(k)}(0) = \alpha_k$$

En fait, c'est fondamental pour que la preuve de Rubel marche !

Le problème avec l'EDA de Rubel

La solution y n'est pas unique, **même avec des conditions initiales** :

$$p(y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \quad y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \dots, y^{(k)}(0) = \alpha_k$$

En fait, c'est fondamental pour que la preuve de Rubel marche !

- ▶ Interprétation de Rubel : cette EDA est universelle
- ▶ Interprétation réaliste : pas vraiment universelle

Problème ouvert (Rubel, 1981)

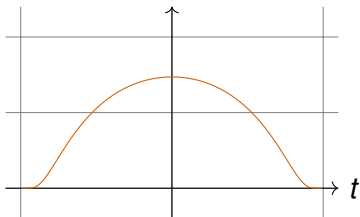
Existe-t-il une ED universelle $y' = p(y)$?

Note : ED polynomiale $\Rightarrow$ solution unique

La preuve de Rubel en une slide

- Soit $f(t) = e^{\frac{-1}{1-t^2}}$ pour $-1 < t < 1$ et $f(t) = 0$ sinon.

Elle satisfait $(1 - t^2)^2 f''(t) + 2t f'(t) = 0$.



La preuve de Rubel en une slide

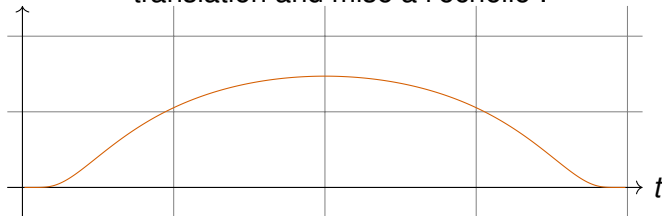
- Soit $f(t) = e^{\frac{-1}{1-t^2}}$ pour $-1 < t < 1$ et $f(t) = 0$ sinon.

Elle satisfait $(1 - t^2)^2 f''(t) + 2tf'(t) = 0$.

- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $y(t) = cf(at + b)$ satisfait

$$\begin{aligned} 3y'^4 y'' y''''^2 & - 4y'^4 y''^2 y'''' + 6y'^3 y''^2 y''' y'''' + 24y'^2 y''^4 y'''' \\ & - 12y'^3 y'' y''''^3 - 29y'^2 y''^3 y''''^2 + 12y''^7 = 0 \end{aligned}$$

translation and mise à l'échelle :



La preuve de Rubel en une slide

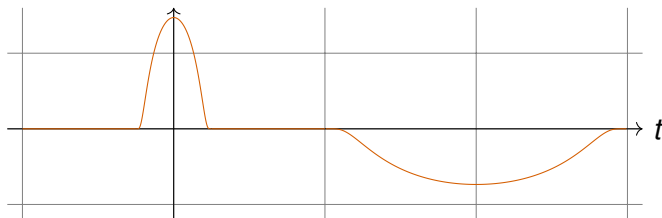
- Soit $f(t) = e^{\frac{-1}{1-t^2}}$ pour $-1 < t < 1$ et $f(t) = 0$ sinon.

Elle satisfait $(1 - t^2)^2 f''(t) + 2tf'(t) = 0$.

- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $y(t) = cf(at + b)$ satisfait

$$3y'^4 y'' y''''^2 - 4y'^4 y''^2 y'''' + 6y'^3 y''^2 y''' y'''' + 24y'^2 y''^4 y'''' - 12y'^3 y'' y''''^3 - 29y'^2 y''^3 y''''^2 + 12y''^7 = 0$$

- On peut coller ensemble un nombre arbitraire de morceaux



La preuve de Rubel en une slide

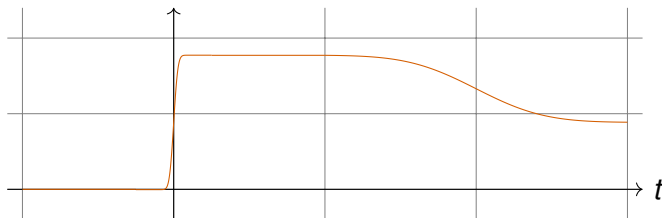
- Soit $f(t) = e^{\frac{-1}{1-t^2}}$ pour $-1 < t < 1$ et $f(t) = 0$ sinon.

Elle satisfait $(1 - t^2)^2 f''(t) + 2tf'(t) = 0$.

- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $y(t) = cf(at + b)$ satisfait

$$3y'^4 y'' y''''^2 - 4y'^4 y''^2 y'''' + 6y'^3 y''^2 y''' y'''' + 24y'^2 y''^4 y'''' - 12y'^3 y'' y''''^3 - 29y'^2 y''^3 y''''^2 + 12y''^7 = 0$$

- On peut coller ensemble un nombre arbitraire de morceaux
- On s'arrange pour que $\int f$ soit solution : **pseudo-affine par morceaux**



La preuve de Rubel en une slide

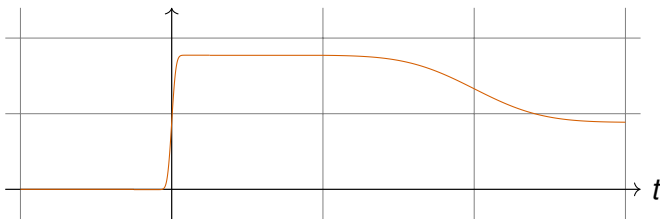
- ▶ Soit $f(t) = e^{\frac{-1}{1-t^2}}$ pour $-1 < t < 1$ et $f(t) = 0$ sinon.

Elle satisfait $(1 - t^2)^2 f''(t) + 2tf'(t) = 0$.

- ▶ Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $y(t) = cf(at + b)$ satisfait

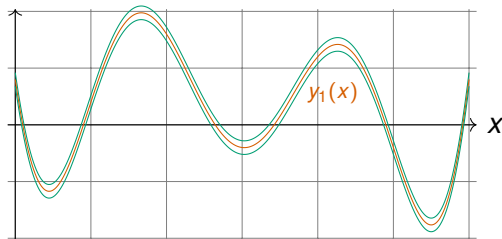
$$3y'^4 y'' y''''^2 - 4y'^4 y''^2 y'''' + 6y'^3 y''^2 y''' y'''' + 24y'^2 y''^4 y'''' - 12y'^3 y'' y''''^3 - 29y'^2 y''^3 y''''^2 + 12y''^7 = 0$$

- ▶ On peut coller ensemble un nombre arbitraire de morceaux
- ▶ On s'arrange pour que $\int f$ soit solution : **pseudo-affine par morceaux**



Conclusion : l'équation de Rubel autorise toutes les fonctions pseudo-affine par morceaux, et celles-ci sont **denses dans** C^0

Équation différentielle polynomiale universelle



Théorème

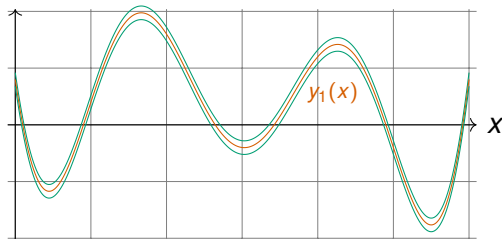
Il existe un (vecteur de) polynôme **fixé** tel que pour toutes fonctions continues f et ε , il existe $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$y(0) = \alpha, \quad y'(t) = p(y(t))$$

a une **unique solution** $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|y_1(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$

Équation différentielle polynomiale universelle



Notes :

- ▶ **système** d'ED,
- ▶ y est analytique
- ▶ $d \approx 300$ variables

Théorème

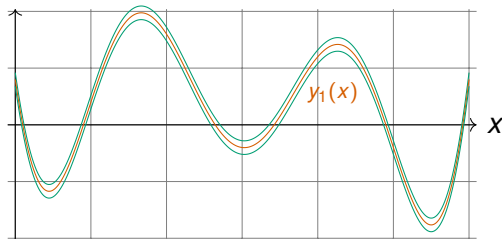
*Il existe un (vecteur de) polynôme **fixé** tel que pour toutes fonctions continues f et ε , il existe $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que*

$$y(0) = \alpha, \quad y'(t) = p(y(t))$$

*a une **unique solution** $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,*

$$|y_1(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$

Équation différentielle polynomiale universelle



Notes :

- ▶ **système** d'ED,
- ▶ y est analytique
- ▶ $d \approx 300$ variables

Théorème

Il existe un (vecteur de) polynôme **fixé** tel que pour toutes fonctions continues f et ε , il existe $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$y(0) = \alpha, \quad y'(t) = p(y(t))$$

a une **unique solution** $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|y_1(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$

Remarque : α est transcendant, mais calculable « à partir » et f et ε

▶ Voir la preuve



Réseaux de réactions :

- ▶ chimiques
- ▶ enzymatiques

$$y' = p(y)$$

?

$$y' = p(y) + e(t)$$

- ▶ Complexité plus fine (linéaire)
- ▶ Non-déterminisme
- ▶ Résistance au bruit
- ▶ Complexité en «espace»
- ▶ Autres modèles
- ▶ Stochastique

Backup slides

Complexity of solving polynomial ODEs

$$y(0) = x \quad y'(t) = p(y(t))$$



Complexity of solving polynomial ODEs

$$y(0) = x \quad y'(t) = p(y(t))$$

Théorème

If $y(t)$ exists, one can compute p, q such that $\left| \frac{p}{q} - y(t) \right| \leq 2^{-n}$ in time

$\text{poly}(\text{size of } x \text{ and } p, n, \ell(t))$

where $\ell(t) \approx$ length of the curve (between x and $y(t)$)

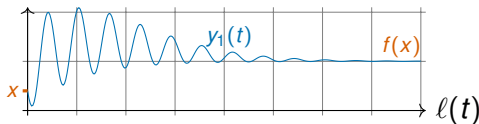


length of the curve = complexity = ressource

Characterization of real polynomial time

Definition : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $\text{ANALOG-P}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists p$ polynomial, $\forall x \in [a, b]$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y)$$



Characterization of real polynomial time

Definition : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $\text{ANALOG-P}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists p$ polynomial, $\forall x \in [a, b]$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y)$$

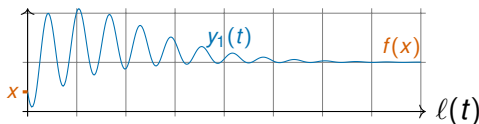
satisfies :

1. $|y_1(t) - f(x)| \leq 2^{-\ell(t)}$

«greater length $\Rightarrow$ greater precision»

2. $\ell(t) \geq t$

«length increases with time»



Characterization of real polynomial time

Definition : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $\text{ANALOG-P}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists p$ polynomial, $\forall x \in [a, b]$

$$y(0) = (x, 0, \dots, 0) \quad y' = p(y)$$

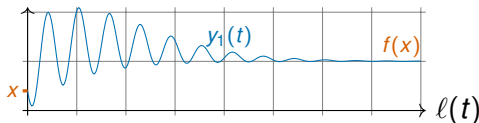
satisfies :

1. $|y_1(t) - f(x)| \leq 2^{-\ell(t)}$

«greater length $\Rightarrow$ greater precision»

2. $\ell(t) \geq t$

«length increases with time»



Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ computable in polynomial time $\Leftrightarrow f \in \text{ANALOG-P}_{\mathbb{R}}$.

Proof by picture (simplified)

binary stream generator : digits of $\alpha \in \mathbb{R}$



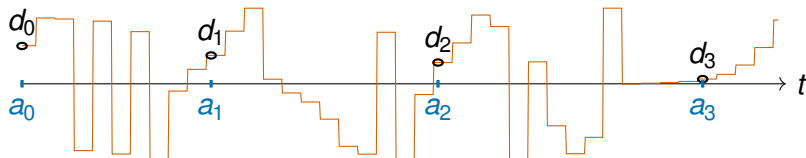
$$f(\alpha, \mu, \lambda, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\mu \sin(2\alpha\pi 4^{\text{round}(t-1/4, \lambda)} + 4\pi/3))$$

It's horrible but generable

round is a mysterious rounding function...

Proof by picture (simplified)

binary stream generator : digits of $\alpha \in \mathbb{R}$

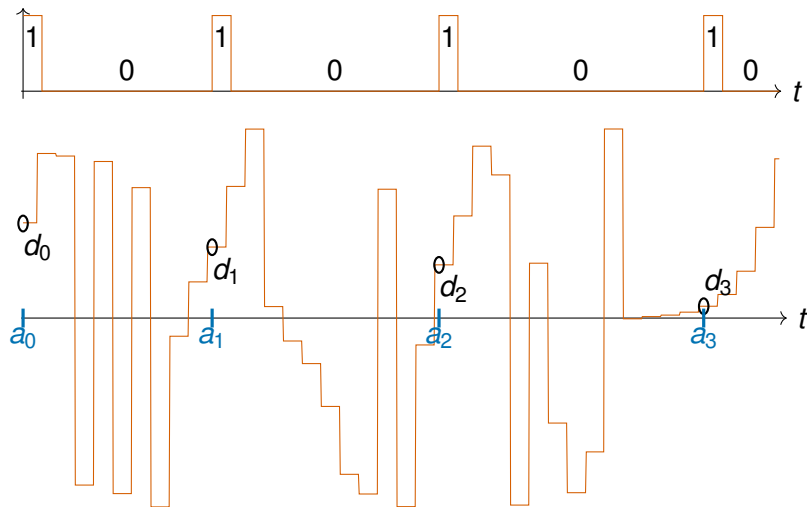


dyadic stream generator : $d_i = m_i 2^{-d_i}$, $a_i = 9i + \sum_{j<i} d_j$

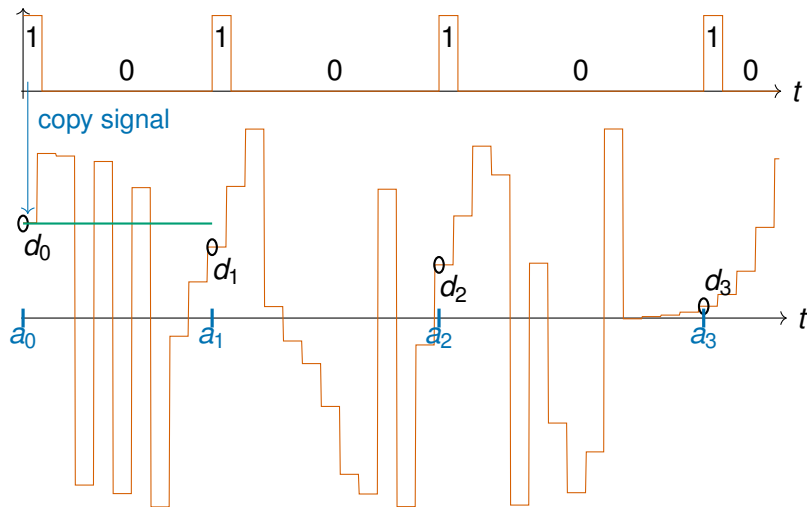
$$f(\alpha, \gamma, t) = \sin(2\alpha\pi 2^{\text{round}(t-1/4, \gamma)})$$

round is a mysterious rounding function...

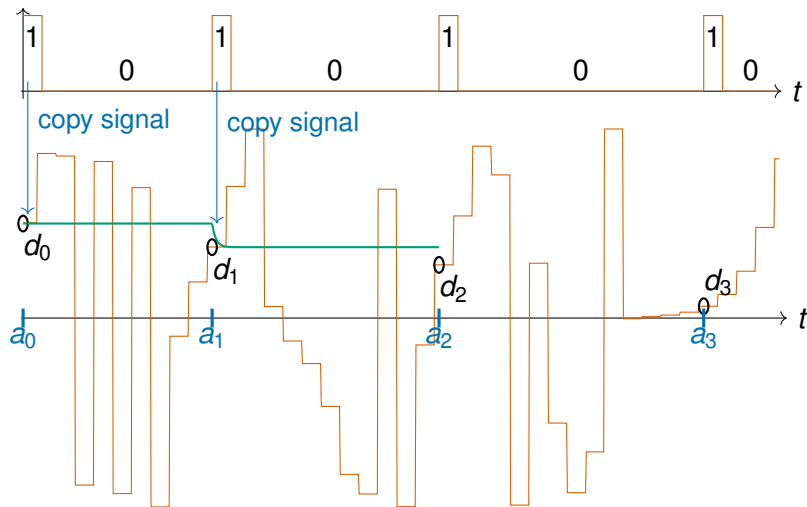
Proof by picture (simplified)



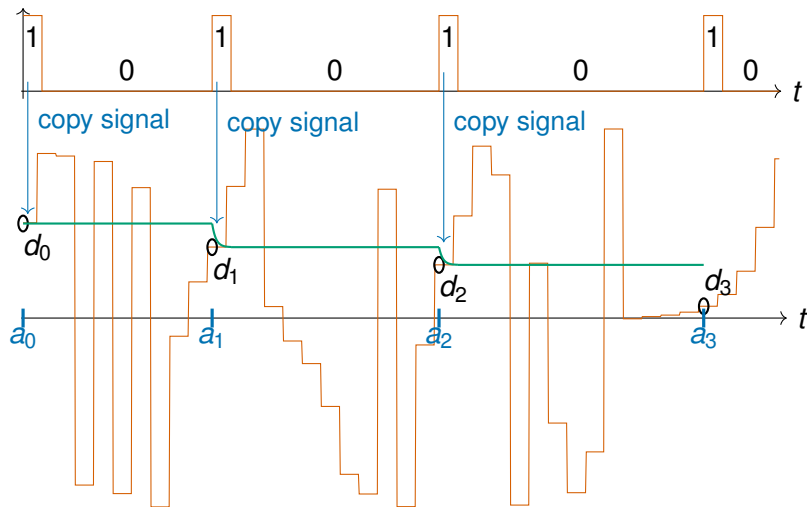
Proof by picture (simplified)



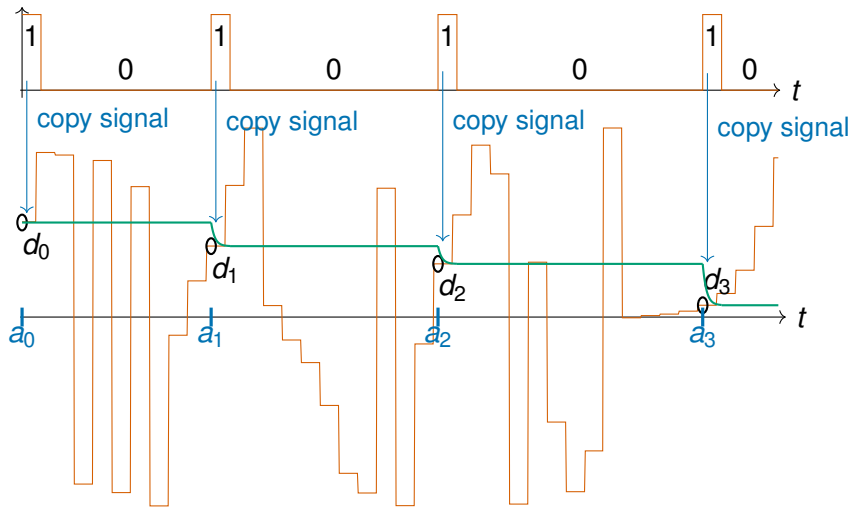
Proof by picture (simplified)



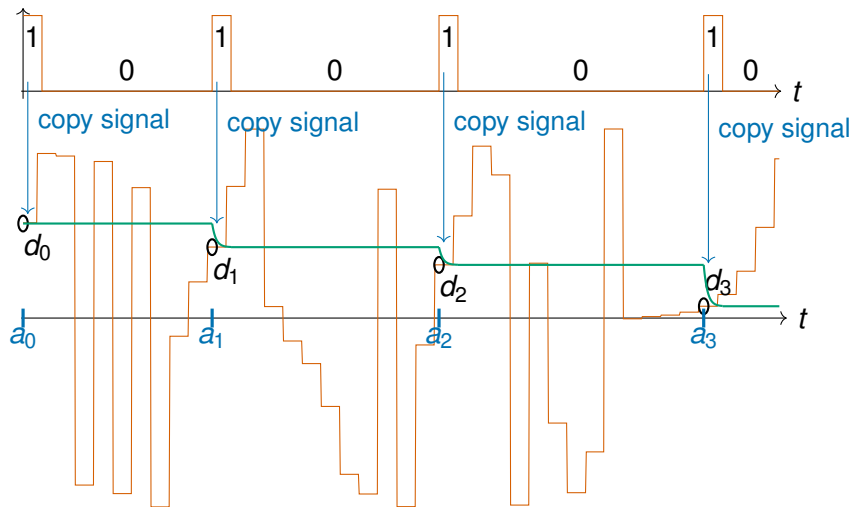
Proof by picture (simplified)



Proof by picture (simplified)

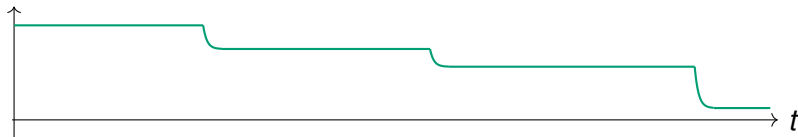


Proof by picture (simplified)



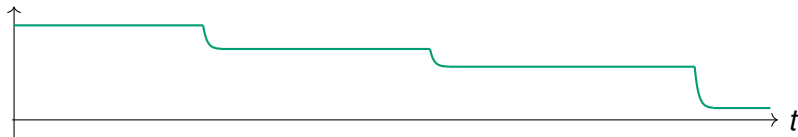
This copy operation is the “non-trivial” part.

Proof by picture (simplified)



We can do **almost piecewise constant functions...**

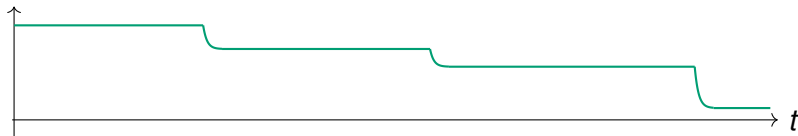
Proof by picture (simplified)



We can do **almost piecewise constant functions...**

- ▶ ...that are **bounded by 1**...
- ▶ ...and have **super slow changing frequency**.

Proof by picture (simplified)



We can do **almost piecewise constant functions...**

- ▶ ...that are **bounded by 1**...
- ▶ ...and have **super slow changing frequency**.

How do we go to arbitrarily large and growing functions? **Can a polynomial ODE even have arbitrary growth?**

An old question on growth

Building a fast-growing ODE, that exists over $\mathbb{R}$:

$$y_1' = y_1 \quad \leadsto \quad y_1(t) = \exp(t)$$

An old question on growth

Building a fast-growing ODE, that exists over $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} y_1' = y_1 & \leadsto & y_1(t) = \exp(t) \\ y_2' = y_1 y_2 & \leadsto & y_2(t) = \exp(\exp(t)) \end{array}$$

An old question on growth

Building a fast-growing ODE, that exists over $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} y_1' = y_1 & \rightsquigarrow & y_1(t) = \exp(t) \\ y_2' = y_1 y_2 & \rightsquigarrow & y_2(t) = \exp(\exp(t)) \\ \dots & & \dots \\ y_n' = y_1 \cdots y_n & \rightsquigarrow & y_n(t) = \exp(\cdots \exp(t) \cdots) := e_n(t) \end{array}$$

An old question on growth

Building a fast-growing ODE, that exists over $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} y_1' = y_1 & \rightsquigarrow & y_1(t) = \exp(t) \\ y_2' = y_1 y_2 & \rightsquigarrow & y_2(t) = \exp(\exp(t)) \\ \dots & & \dots \\ y_n' = y_1 \cdots y_n & \rightsquigarrow & y_n(t) = \exp(\cdots \exp(t) \cdots) := e_n(t) \end{array}$$

Conjecture (Emile Borel, 1899)

With n variables, cannot do better than $\mathcal{O}_t(e_n(At^k))$. $e_n = \exp^{[n]}$

An old question on growth

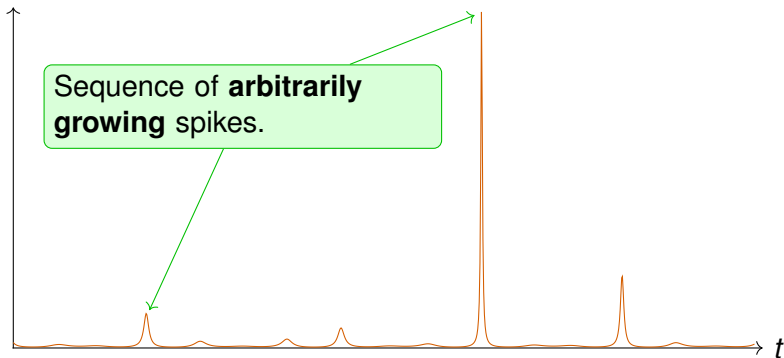
Conjecture (Emile Borel, 1899)

With n variables, cannot do better than $\mathcal{O}_t(e_n(At^k))$.

$$e_n = \exp^{[n]}$$

Counter-example (Vijayaraghavan, 1932)

$$\frac{1}{2 - \cos(t) - \cos(\alpha t)}$$



An old question on growth

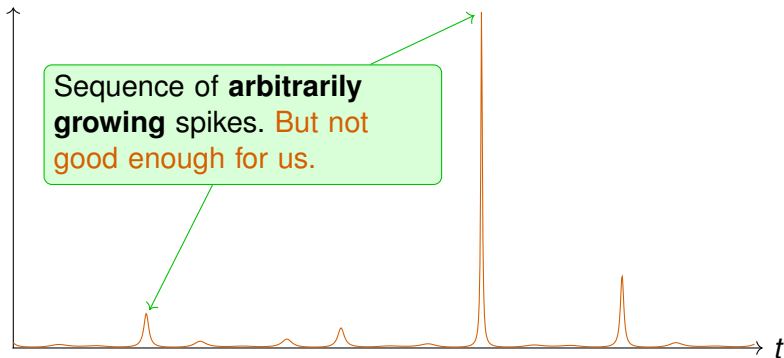
Conjecture (Emile Borel, 1899)

With n variables, cannot do better than $\mathcal{O}_t(e_n(At^k))$.

$$e_n = \exp^{[n]}$$

Counter-example (Vijayaraghavan, 1932)

$$\frac{1}{2 - \cos(t) - \cos(\alpha t)}$$



An old question on growth

Conjecture (Emile Borel, 1899)

With n variables, cannot do better than $\mathcal{O}_t(e_n(At^k))$. $e_n = \exp^{[n]}$

Counter-example (Vijayaraghavan, 1932)

$$\frac{1}{2 - \cos(t) - \cos(\alpha t)}$$

Théorème (Arbitrary growth)

There exists a polynomial $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ such that for any continuous function $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, we can find $\alpha \in \mathbb{R}^d$ such that

satisfies
$$y(0) = \alpha, \quad y'(t) = p(y(t))$$

$$y_1(t) \geq f(t), \quad \forall t \geq 0.$$

An old question on growth

Conjecture (Emile Borel, 1899)

With n variables, cannot do better than $\mathcal{O}_t(e_n(At^k))$. $e_n = \exp^{[n]}$

Counter-example (Vijayaraghavan, 1932)

$$\frac{1}{2 - \cos(t) - \cos(\alpha t)}$$

Théorème (Arbitrary growth)

There exists a polynomial $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ such that for any continuous function $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, we can find $\alpha \in \mathbb{R}^d$ such that

satisfies
$$y(0) = \alpha, \quad y'(t) = p(y(t))$$

$$y_1(t) \geq f(t), \quad \forall t \geq 0.$$

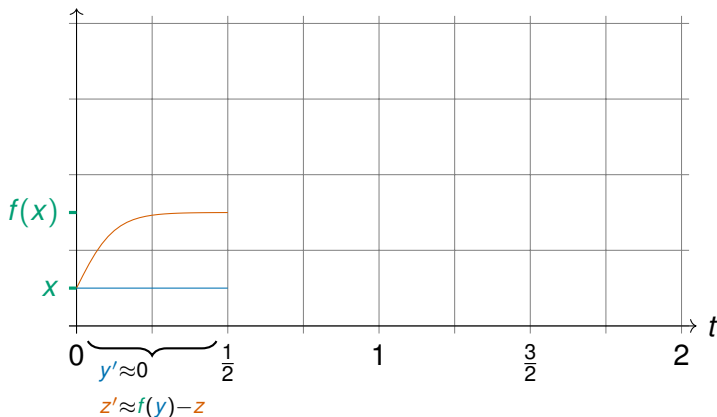
Note : both results require α to be **transcendental**. Conjecture still open for **rational** coefficients.

Proof gem : iteration with differential equations

Goal : iterate f with a GPAC : $y(n) \approx f^{[n]}([x])$

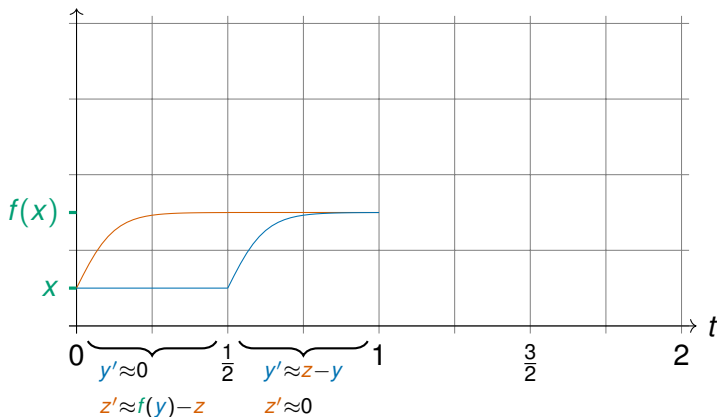
Proof gem : iteration with differential equations

Goal : iterate f with a GPAC : $y(n) \approx f^{[n]}([x])$



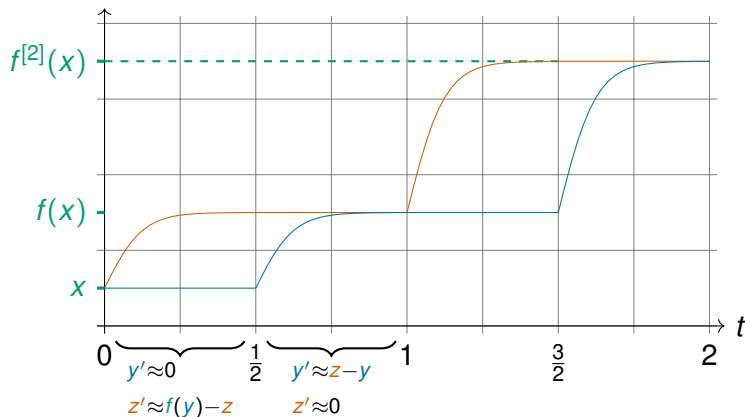
Proof gem : iteration with differential equations

Goal : iterate f with a GPAC : $y(n) \approx f^{[n]}([x])$

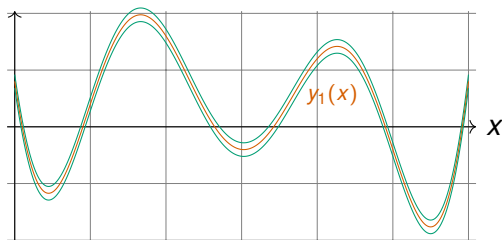


Proof gem : iteration with differential equations

Goal : iterate f with a GPAC : $y(n) \approx f^{[n]}([x])$



Universal DAE revisited



Théorème

There exists a **fixed** polynomial p and $k \in \mathbb{N}$ such that for any continuous functions f and ε , there exists $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ such that

$$p(y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \quad y(0) = \alpha_0, y'(0) = \alpha_1, \dots, y^{(k)}(0) = \alpha_k$$

has a **unique analytic solution** and this solution satisfies such that

$$|y(t) - f(t)| \leq \varepsilon(t).$$