

Calculs analogiques: calculabilité et complexité

Amaury Pouly



INSTITUT
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE
FONDAMENTALE



université
PARIS
DIDEROT
CITEAUX



Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés

2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes



Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés
- ▶ **obsolètes ?**

2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés
- ▶ **obsolètes ?**

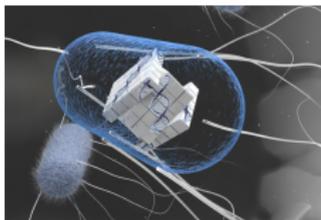
2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

2030 ?



- ▶ analogique ?
- ▶ digital ?

Le retour des ordinateurs analogiques

1930



ordinateurs analogiques :

- ▶ difficile à programmer
- ▶ très spécialisés
- ▶ **obsolètes ?**

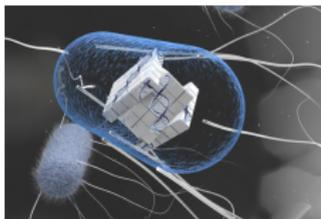
2000



ordinateurs digitaux :

- ▶ « faciles » à programmer
- ▶ généralistes

2030 ?

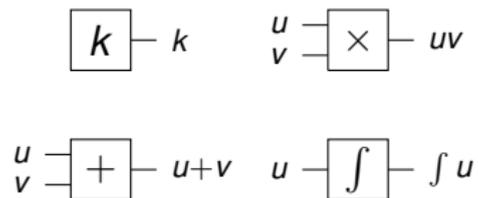


- ▶ analogique ?
- ▶ digital ?
- ▶ **les deux!**



Analyseur différentiel

Des machines aux modèles

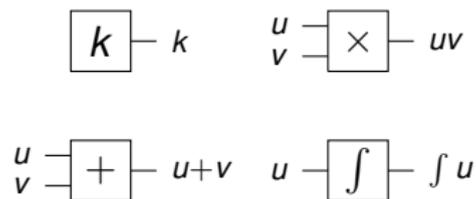


General Purpose Analog
Computer, Shannon 1936



Analyseur différentiel

Des machines aux modèles



General Purpose Analog
Computer, Shannon 1936

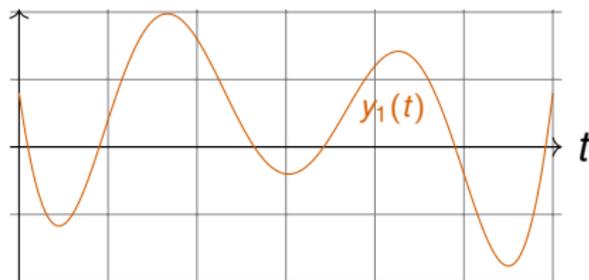


$$y(0) = y_0, \quad y'(t) = p(y(t))$$

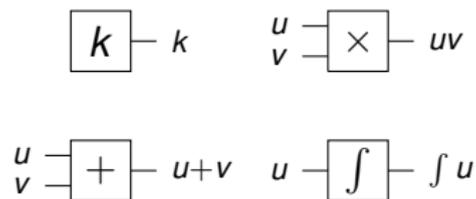
Équations différentielles
polynomiales, Graça 2004



Analyseur différentiel



Des machines aux modèles

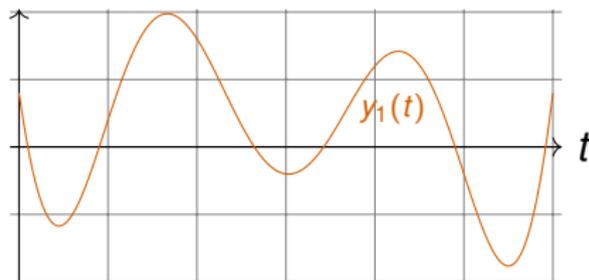


General Purpose Analog
Computer, Shannon 1936



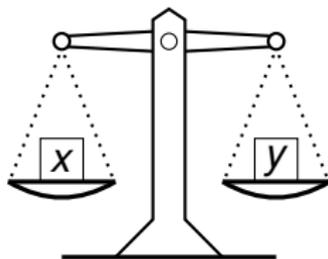
Analyseur différentiel

$y(0) = y_0, \quad y'(t) = p(y(t))$
Équations différentielles
polynomiales, Graça 2004



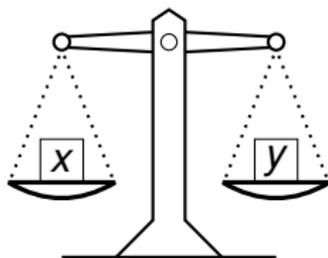
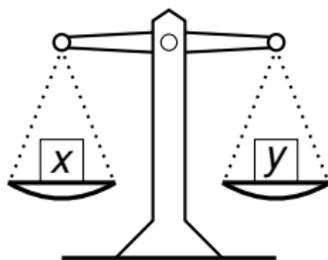
Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



Une balance calcule-t-elle une fonction ?

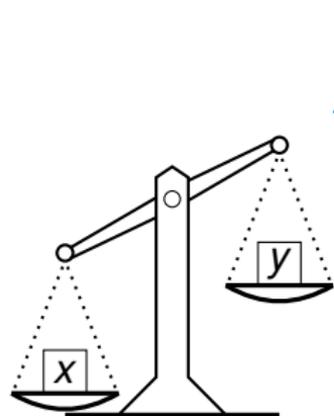
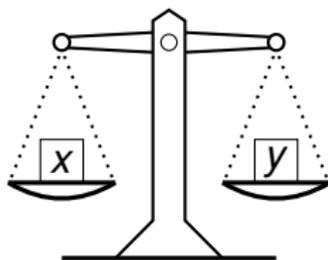
Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



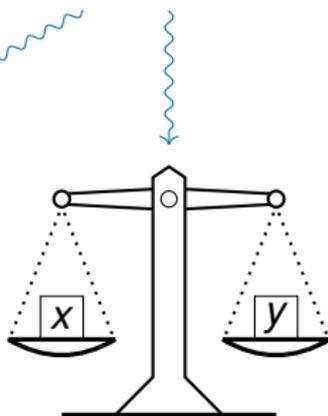
$$x = y$$

Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



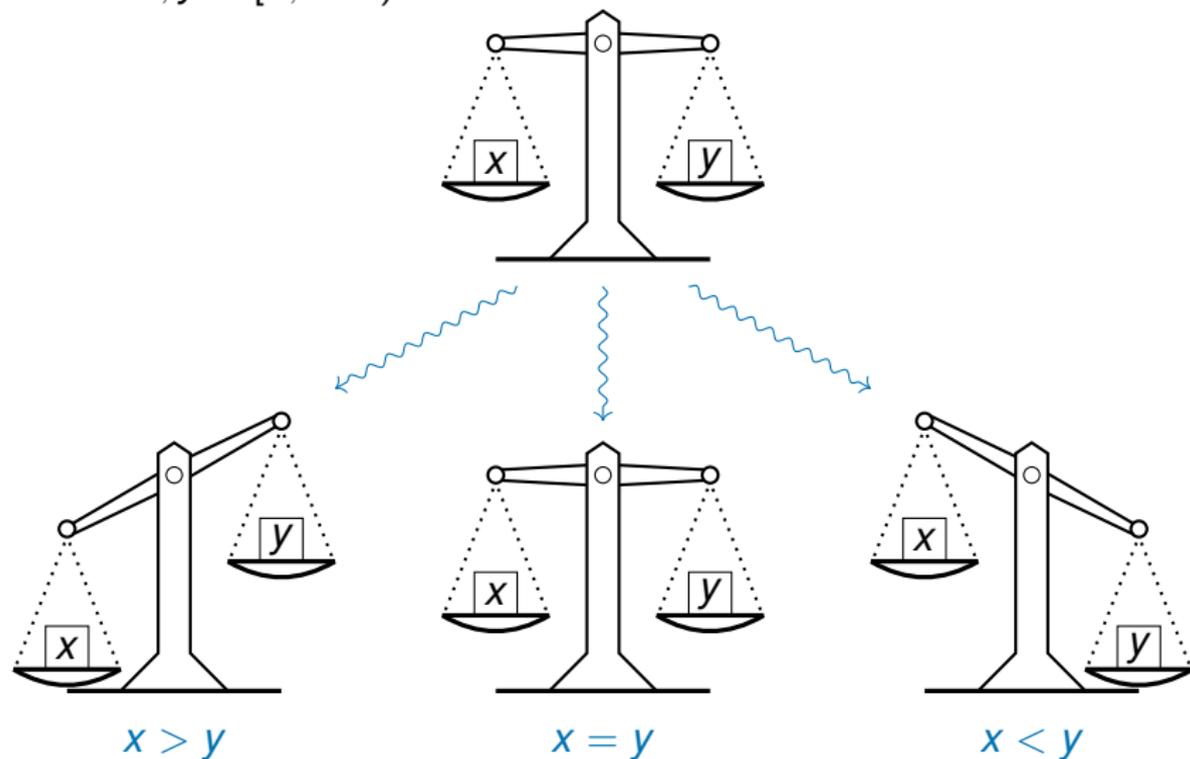
$x > y$



$x = y$

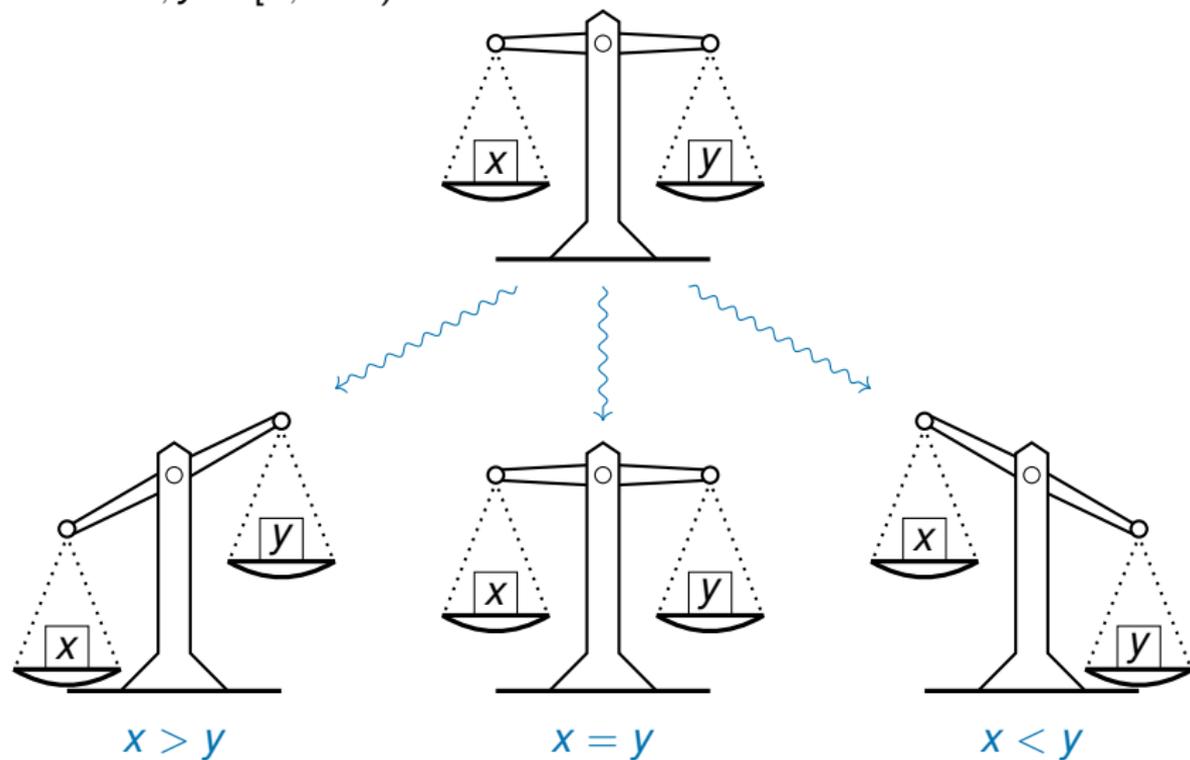
Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$



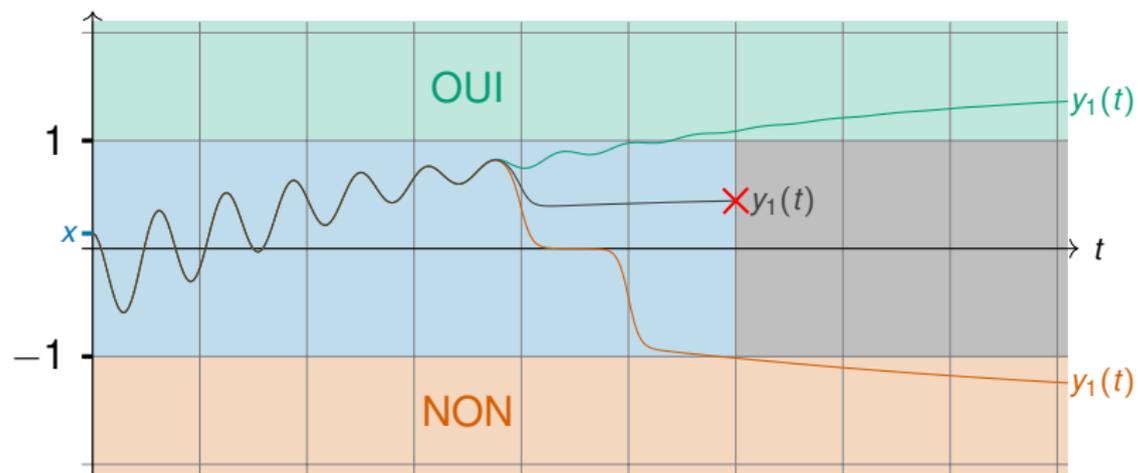
Une balance calcule-t-elle une fonction ?

Entrées : $x, y \in [0, +\infty)$

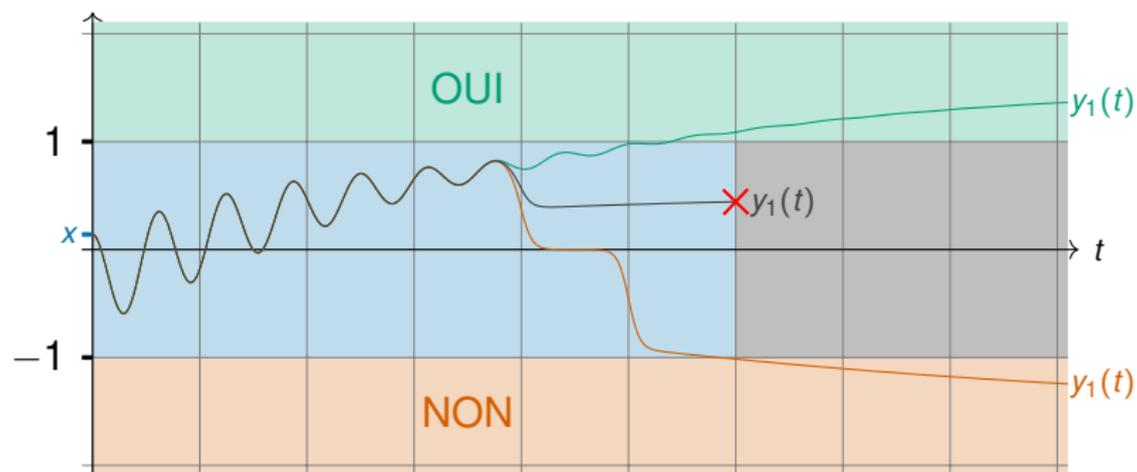


Sortie : $\text{signe}(x - y)$?

Une notion formelle de calcul



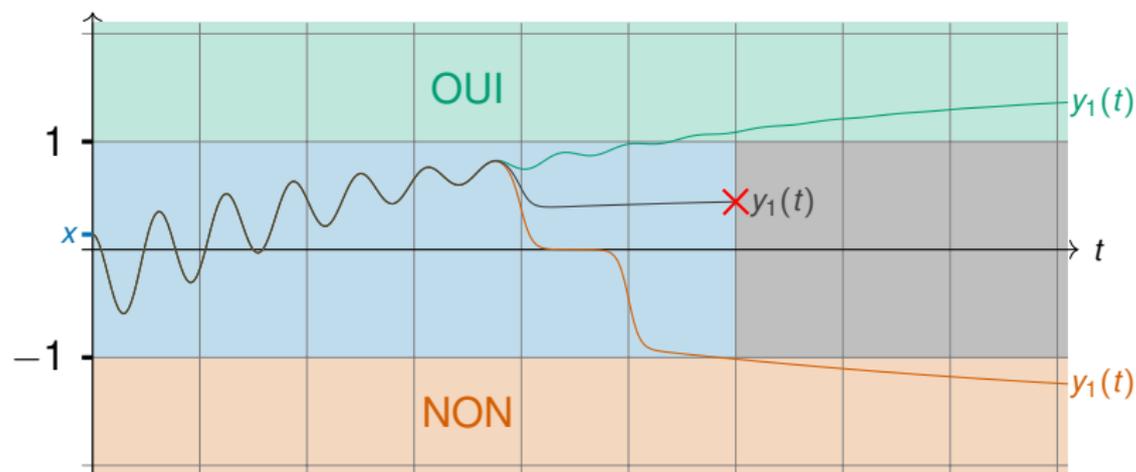
Une notion formelle de calcul



Théorème (Bournez et al, 2010)

Ce modèle est équivalent à une machine de Turing.

Une notion formelle de calcul



Théorème (Bournez et al, 2010)

Ce modèle est équivalent à une machine de Turing.

- ▶ théorie de la calculabilité analogique
- ▶ caractérisation « continue » de la calculabilité classique

De la calculabilité à la complexité

Théorie de la complexité classique :

- ▶ notions intuitives de temps et espace
- ▶ mesure la difficulté d'un problème

Quelques classes : P, NP, PSPACE

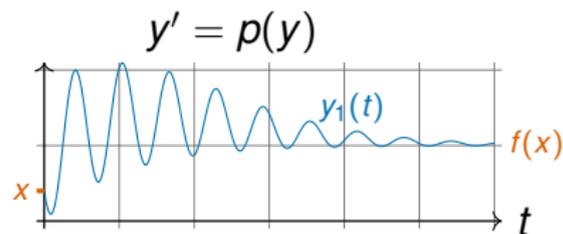
De la calculabilité à la complexité

Théorie de la complexité classique :

- ▶ notions intuitives de temps et espace
- ▶ mesure la difficulté d'un problème

Quelques classes : P, NP, PSPACE

Théorie de la complexité analogique ?



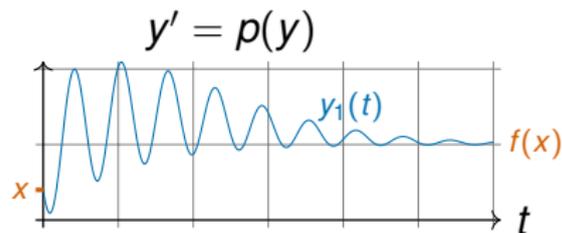
De la calculabilité à la complexité

Théorie de la complexité classique :

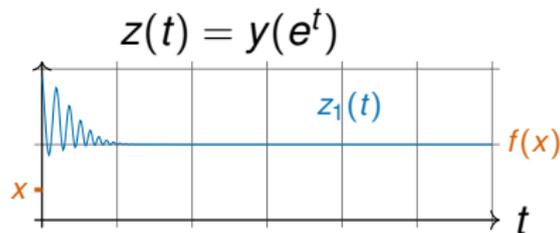
- ▶ notions intuitives de temps et espace
- ▶ mesure la difficulté d'un problème

Quelques classes : P, NP, PSPACE

Théorie de la complexité analogique ?



\rightsquigarrow



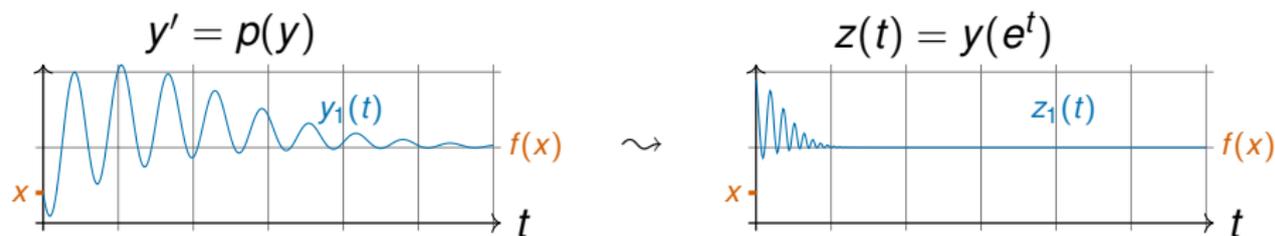
De la calculabilité à la complexité

Théorie de la complexité classique :

- ▶ notions intuitives de temps et espace
- ▶ mesure la difficulté d'un problème

Quelques classes : P, NP, PSPACE

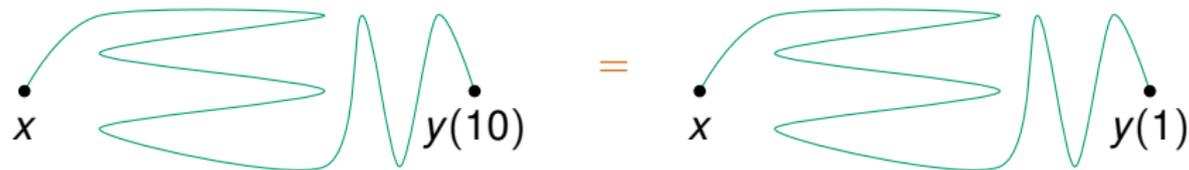
Théorie de la complexité analogique ? Pas clair !



- ▶ Le temps n'est pas une bonne notion de complexité
- ▶ Pas d'autres notions évidentes qui marchent

La complexité dans le monde analogique

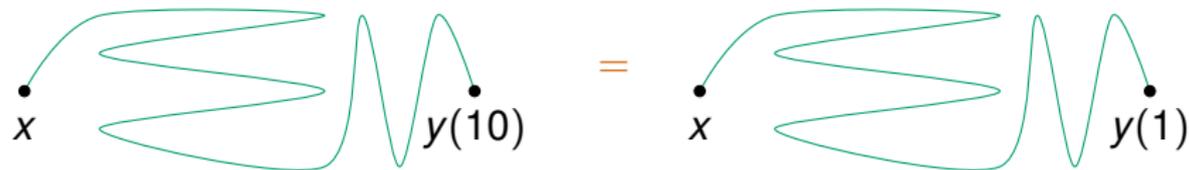
Mesure de complexité : longueur de la trajectoire



Accélération du temps : même courbe = même complexité !

La complexité dans le monde analogique

Mesure de complexité : longueur de la trajectoire



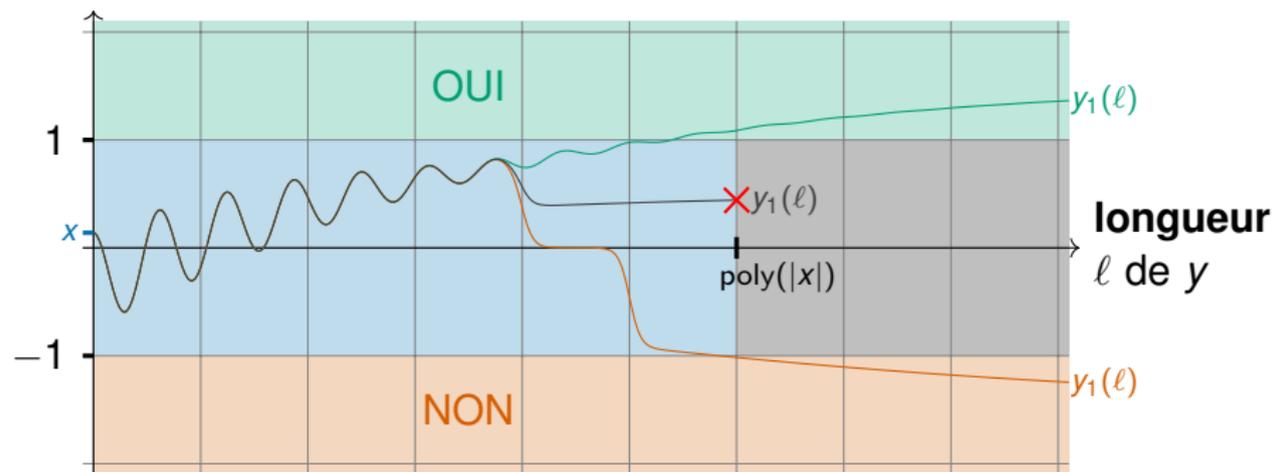
Accélération du temps : même courbe = même complexité !



Même temps, courbe différentes : complexité différente !

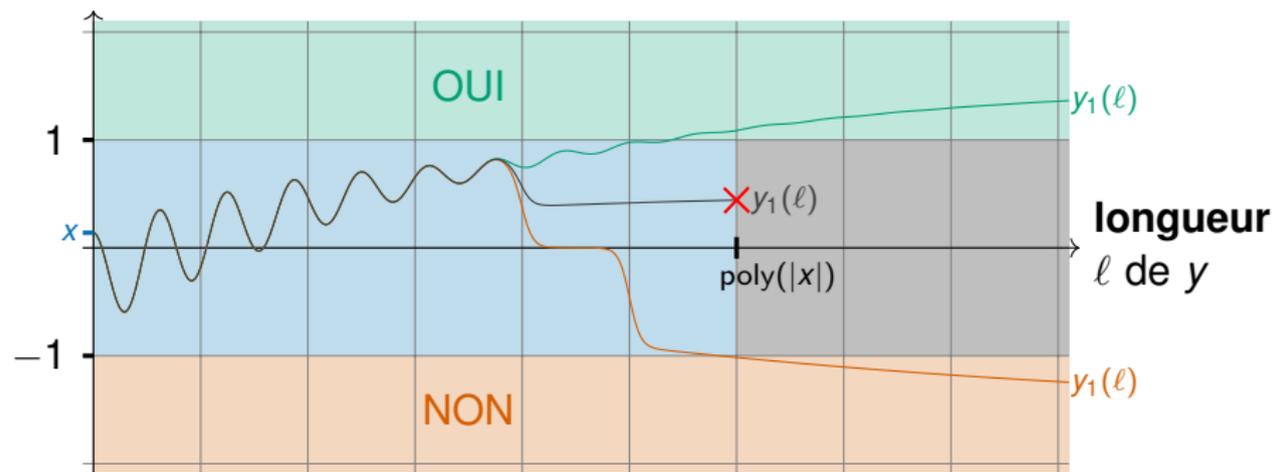
La complexité dans le monde analogique

Mesure de complexité : longueur de la trajectoire



La complexité dans le monde analogique

Mesure de complexité : longueur de la trajectoire



Théorème

Cette notion est équivalente à la classe P des machines de Turing.

- ▶ théorie de la **complexité** analogique
- ▶ caractérisation « continue » de la complexité classique
- ▶ temps de Turing \approx longueur analogique



Réseaux de réactions :

- ▶ chimiques
- ▶ enzymatiques

$$y' = p(y)$$

?

$$y' = p(y) + e(t)$$

- ▶ Complexité plus fine (linéaire)
- ▶ Non-déterminisme
- ▶ Résistance au bruit
- ▶ Complexité en «espace»
- ▶ Autres modèles
- ▶ Stochastique